ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სფერული გეომეტრიის კავშირი ევკლიდურ გეომეტრიასთან

მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი კაკულაშვილი

(დოქტორანტის სემინარი 2)

ხელმძღვანელი:

ფიზიკა – მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი
ასოცირებული პროფესორი
გია გიორგაძე

თბილისი 2018

სარჩევი

შესავალი

სფერული გეომეტრია არის გეომეტრია სფეროს 2 განზომილებიან ზედაპირზე. მისი ორი ძირითადი გამოყენება ხდება ნავიგაციაში და ასტრონომიაშია. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ მისი და ევკლიდური გეომეტრიის კავშირებ, ასავე განვაზოგადოთ ზოგიერთი თეორემა ევკლიდური გეომეტრიიდან სფერულზე.

Resume

Spherical geometry is the geometry of the two-dimensional surface of a sphere. Two practical applications of the principles of spherical geometry are navigation and astronomy. The article is intended to present the connection of spherical geometry with Euclidean geometry and extend basic theorems of Euclidean geometry to the spherical case.

სფერული მრავალკუთხედები

სფერული გეომტრია საშვალებას გვაძლევს სფეროს ზედაპირზე ვიმუშაოთ. სტიის მიზანია ვაჩვენოთ მისი შესაძლებლობები და კავშირი ევკლიდურ გეომეტრიასთან. მონაკვეთს სფერულ გეომეტრიაში ვუწოდებთ ისეთი წრეწირის სეგმენტს, რომელიც მიიღება სფეროს ცენტრზე გამავალი ჰიპერსიბრტყისა და სფეროს თანაკვეთით. ორ წრფეს შორის კუთხეს ვუწოდებთ, მათ მხებს შორის კუთხეს. ეს შეთანხმება გვაძლევს საშვალებას განვსაზღვროთ სფერული მრავალკუთხედის ფართობი და შევისწავლოთ სფერული სამკუთხედი. ფორმულების შემოწმებაში დიდ როლს თამაშობს ევკლიდური გეომეტრია, რადგან მისი ძალიან მცირე უბნები უახლოვდება სიბრტეს და ვიღებთ კლასიკურ გეომეტრიას.

ისევე როგორც ევკლიდურ გეომეტრიაში, სფერულ გეომტრიაში სამკუთხედს აქვს გარკვეული უპირატესობები სხვა მრავალკუთხედებთან შედარებით.

თეორემა 3.1. თუ მოცემულ წრეწირში გვაქვს ორი ქორდა α და β, რომლებიც ერთი წერილიდან გამოდიან და ადგენენ $\mathcal{A}$ კუთხეს, და ქორდებს შორის წირის გრადუსული სიგრძეა არის ω (რადიანებში). ჩვენ გვაქვს ფორმულა

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\mathcal{A}$$

თეორემა 3.2. თუ გვაბს სამკუთხედი α, β, γ გვერდებით და $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ კუთხეები, მაშინ გვაქვს

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\mathcal{A}} = \frac{\sin\beta}{\sin\mathcal{B}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\mathcal{C}} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tan\zeta \tag{1}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\mathcal{A}-\frac{\mathcal{S}}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\mathcal{B}-\frac{\mathcal{S}}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\mathcal{C}-\frac{\mathcal{S}}{2}\right)} = \tan\zeta \tag{2}$$

თეორემა 3.3. თუ გვაბს სამკუთხედი α, β, γ გვერდებით და შემოხაზული წრეწირის რადიუსია ζ

$$\tan\zeta = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{\sin p\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}} \tag{1}$$

$$\sin\left(\frac{\mathcal{S}}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cot\zeta \tag{2}$$

თეორემა 3.4. თუ სამკუთხედში მოცემულია ორი გვერდი და კუთხე მათ შორის, მაშინ

$$\tan\left(\frac{\mathcal{S}}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^2} \tag{1}$$

$$\tan\left(\frac{\mathcal{S}}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\mathcal{C}}{1+\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\mathcal{C}} \tag{2}$$

თეორემა 3.5. თუ გვაბს სამკუთხედი α, β, γ გვერდებით მაშინ

$$1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\mathcal{S}}{2}\right)$$

თეორემა 3.6. ვთვათ გვაქვს ამოზნექილი მრავაკლუთხედი, რომელზეც შემოიხაზება წრეწირი, მაშინ გვაქვს წერილი, რომელიც თანაბრად არის დაშორებული წვეროებისგან, ამიტომ მრავაკლუთხედის შეგვიძლია დავშალოთ ტოლფერდა მრავალკუთხედებად. ვთქვათ მრავალკუთხედს აქვს n გვერდი, მაშინ მისი ფართობი არის ტოლფერდა სამკუთხედების ფართობის ჯამი. ფერდოს სიგრძე არის შემოხაზული წრეწირის ζ რადიუსის ტოლი და წრეწირის გრადუსული გვერდების სიგრძეები $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$

$$\frac{\mathcal{S}}{2} = \pi - \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctan}\left(\tan\left(\frac{\omega_i}{2}\right)\cos\zeta\right)$$

სადაც

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 2\pi$$

და

$$\omega_i = \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{\sin\zeta}\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)\right)$$

α_i — გვერდის სიგრძე.

თეორემა 3.7. ავიღოთ ამოზნექილი ოთკუთხედი, რომელიც ჩაიხაზება წრეში. თუ მისი გვერდებია α, β, γ და δ, მაშინ მისი ფართობი შეგვიძლია გამოვთვალოთ ფორმულით, რომელიც არის ბრაჰმაგუფთას ანალოგი

$$\tan\frac{\mathcal{S}}{4} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{p-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{p-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{p-\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{p-\delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{p-\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{p-\alpha-\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{p-\alpha-\delta}{2}\right)}}$$

ლიტერატურა

[1] Giorgadze G., Khimshiashvili G. Cyclic configurations of spherical polygons Doklady Mathematics, 87, 3 (2013), 300–303.

[2] Giorgadze G., Khimshiashvili G. Cyclic configurations of spherical quadrilaterals. Bull. Georgian Nat. Acag. Sci., 3, 2 (2009), 23–27.