ივანე ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

კოშის ფუნქციონალური განტოლების სტოქასტური ვერსია

მათემატიკის დეპარტამენტი

ლუკა თიკანაძე

(დოქტორანტის სემინარი 1)

ხელმძღვანელი:

პროფესორი
მიხეილ მანია

თბილისი 2019

შინაარსი

შესავალი

ჩვენ ვიხილავთ კოშის ფუნქციონალურ განტოლებას

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ყოველი $x, y \in \mathfrak{R}$. ვეძებთ ნამდვილ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს მოყვანილ განტოლებას. ცხადია, რომ ამ განტოლებას აკმაყოფილებს წრფივი ფუქნცია $f(x) = \lambda x$.
პრობლემას წარმაოდგენდა ამ განტოლების ამონახსნის ერთადერთობის დამტკიცება. ცნობილაი რომ თუ f ფუქნცია ზომადია მაშინ მას ერთადერთი ამხოსნა გააჩნია და ის λx-ის ტოლია (იხ.მაგ. [2].იხ. აგრეთვე [1] და მასში არსებული ლიტერატურა). (თუ ფუნქცია f არ არის ზომადი მაშინ არსებობს არაწრფივი ამოხსნებიც, ასევე ცნობილია [3]).
ჩვენ შევისწავლით ამ განტოლების სტოქასტურ ვერსიას. აღმოჩნდა რომ თუ f აკმაყოფილებს ტოლობას

$$f(x+W_t) = f(x) + f(W_t)$$

$\forall x \in \mathfrak{R}$ და $t \in [0,T]$, სადაც W_t ბროუნის მოძრაობაა, მაშინ ამ განტოლების ამხოსნა კვლავ წრფივი ფუნქციაა. ქვევით მოგვყავს ამ დებულების დამტკციება.

ძირითადი შედეგის დამტკიცება

ვთვათ W_t ბროუნის მოძრაობაა $[0,T]$ სეგმენტზე და ვთქვათ $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგს

$$f(x+W_t) = f(x) + f(W_t) \tag{2.1}$$

ყოველი $x \in \mathfrak{R}$ და $t \in [0,T]$. ვაჩვენოთ რომ თუ სრულდება (2.1) მაშინ $f(W_t)$ მარტინგალია. ჩვენ ვიწყებთ ფაქტით, რომ $f(W_t)$ ემორჩილება გაუსის განაწილებას.
ვთქვათ $X = f(W_t)$ და $Y = f(W_{2t} - W_t)$. ადვილი დასანახია, რომ W_t და $W_{2t} - W_t$ ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია შესაბამისად X და Y შემთხვევითი სიდიდეებიც ერთნაირად არიან განაწილებული $\left(X \overset{\mathcal{L}}{=} Y\right)$.
თუ ავიღებთ $x = -W_t$, მაშინ (2.1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$f(W_t) = -f(-W_t)\,.$$

შესაბამისად $f(W_t)$ (და ანალოგიურად $f(W_{2t} - W_t)$) სიმეტრიულად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია.
(2.1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ (თუ ჩავსვათ $x = W_{2t} - W_t$-ს (2.1)-ში) მივიღებთ შემდეგს

$$X + Y = f(W_t) + f(W_{2t} - W_t) = f(2W_t)$$

და თუ ჩავსვავთ $x = W_{2t} - 2W_t$ განტოლება (2.1)-ში მივიღებთ

$$X - Y = f(W_t) - f(W_{2t} - W_t) = -f(2W_t - W_{2t})$$

მას შემდეგ რაც W_{2t} და $2W_t - W_{2t}$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, შესაბამისად $X + Y$ და $X - Y$ ასევე დამოუკიდებლები არიან. ბერშტეინის თეორემიდან, კი გამომდიანრეობს, რომ $X = f(W_t)$ და $Y = f(W_{2t} - W_t)$ გაუსური შემთხვევითი სიდიდეებია, ე.ი. X კვადრატით ინტეგრებად შემთხვევითი სიდიდეა

$$EX^2 = Ef^2(W_t) = \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} f^2(x)\,dx < \infty.$$

ბოლო განტოლებიდან გამომდინარეობს რომ $f(x)$ ლოკალურად კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციაა.
ახლა განვაგრძოთ მარტინგალური ტოლობის ჩვენებით,

$$E\{f(W_t)\,|\mathcal{F}_s\} = f(W_s) \tag{2.2}$$

შევცვალოთ (2.1)–ში $x = W_s - W_t$. მივითებთ $f(W_s) = f(W_s - W_t) + f(W_t)$ თუ გადავწერთ ბოლო განტოლებას მვიითებთ $f(W_t) = f(W_s) - f(W_s - W_t)$. ბოლოს მიღებული ტოლობა ჩავსვათ (2.2)–ში, საიდანაც ვიღებთ

$$E\{f(W_t)|\mathcal{F}_s\} = E\{f(W_s) - f(W_s - W_t)|\mathcal{F}_s\} = f(W_s) - Ef(W_s - W_t)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $Ef(W_s - W_t) = 0$. კვლავ დავუბრუდნეთ (2.1) განტოლებას, სადაც ვსვავთ $x = W_s - W_t$, ვიღებთ შემდეგს

$$f(W_s) - f(W_t) = f(W_s - W_t).$$

(2.1) განტოლებაში W_t შევცვალოთ W_s–ით, შესაბამისად ვიღებთ

$$f(x + W_s) = f(x) + f(W_s) \tag{2.3}$$

და ჩავსვათ (2.3)–ში $x = W_t - W_s$ საიდანაც მივიღებთ

$$f(W_t) - f(W_s) = f(W_t - W_s)$$

გადავწეროთ ბოლო ტოლობა შემდეგნაირად

$$f(W_s) - f(W_t) = -f(W_t - W_s).$$

ტრივიალურია, რომ $W_s - W_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} W_t - W_s$ საიდანაც გამომდიანრეობს, რომ

$$Ef(W_s - W_t) = -Ef(W_t - W_s),$$

საიდანაც

$$2Ef(W_s - W_t) = 0.$$

საიდანაც მივიღეთ (2.2) ტოლობის სამართლიანობა, ე.ი. $f(W_t)$ მარტინგალია.
ყოველივე ზემოთ ხსენებულის გათვალისწინებით სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 2.1. თუ ადგილი აქვს ტოლობას $f(x + W_t) = f(x) + f(W_t)$, ყოველი $x \in \mathfrak{R}$ და $t \in [0, T]$–თვის, სადაც $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ და W_t ვინერის პროცესია, მაშინ

$$f(x) = \lambda x.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ

$$g(x) = \frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon} f(y)\,dy. \tag{2.4}$$

ცხადია, რომ

$$g(0) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} f(y)\,dy$$

გამოვიყენოთ (2.4) განტოლება და ვნახოთ $g(x + W_t)$

$$g(x + W_t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{x+W_t}^{x+W_t+\epsilon} f(y)\,dy = \frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon} f(y)\,dy + f(W_t) = g(x) + f(W_t)$$

ვინაიდან $f(W_t)$ მარტინგალია, უკანასკნელი განტოლების ძალით პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ $g(x + W_t)$ ასევე მარტინგალია. რაც ნიშნავს, რომ $f(W_t) \in \mathcal{M}^2([0, T]) \Rightarrow g(x + W_t) \in \mathcal{M}^2([0, T])$. მოცემულის გამოყენებით შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$g(x + W_t) = g(x) + \int_0^t g'(x + W_s)\,dW_s$$

ბოლო განტოლებაში $x = 0$–ის ჩასმით ვიღებთ შემდეგს

$$g(W_t) = g(0) + \int_0^t g'(W_s)\, dW_s$$

ამავდროულად $g(W_t) = g(0) + f(W_t)$, მოცემული ბოლო ორი განტოლებიდან კი ვასკვნით, რომ

$$f(W_t) = \int_0^t g'(W_s)\, dW_s.$$

ასევე სამართლიანია შემდეგი

$$g(x) + \int_0^t g'(x + W_s)\, dW_s = g(x) + \int_0^t g'(W_s)\, dW_s.$$

აქედან ვიღებთ, რომ

$$E\int_0^t (g'(x + W_s) - g'(W_s))^2\, ds = 0.$$

მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\int_0^t \int_{\Re} (g'(x + y) - g'(y))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{y^2}{2s}}\, dyds$$

ყოველი $x \in \Re$ გვაქვს $g'(x + y) = g'(y)$ თ.ყ. y–ისთვის ლებეგის ზომით. განვიხილოთ (2.4) განტოლება და ტოლობა

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(y)\, dy$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\forall a \in \Re$

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(y + a)\, dy$$

ცვლადის შეცვლით ვიღებთ შემდეგს

$$g(x) = g(0) + g(a + x) - g(a)$$

$$g(a + x) = g(x) + g(a) - g(0)$$

აღვნიშნოთ $\phi(x) = g(x) - g(0)$. მარტივი დასანახია, რომ ϕ ფუნქცია აკმაყოფილებს კოშის ფუნქციონალურ განტოლებას, ყოველი $x, y \in \Re$. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\phi(x) = g(x) - g(0) = \lambda x$$

რაიმე $\lambda \in \Re$.
მას შემდეგ რაც

$$g(x) = \lambda x + g(0) = \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} f(y)\, dy$$

გავაწარმოოთ უკანასკნელი განტოლება x–ით, რის შემდეგაც მივიღებთ

$$\lambda = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

პირობით კი გვაქვს, რომ f ფუქნცია აკმაყოფილებს კოშის ფუქნციონალურ განტოლებას, ე.ი.

$$f(\epsilon) = \lambda\epsilon$$

ნებისმიერი $\lambda \in \Re$ $\square$

ლიტერატურა

[1] A probabilistic note on the Cauchy functional equation, Springer International Publishing AG. part of Springer Nature 2018, Sergey N.Smirnov (2018)

[2] Lebesque,H Sur les transformations ponctuelles, transformant les plans en plans, qu'on peut definir par des procedes analytiques. Atti della R.Academia delle Scienze di Torino XLII, 532-539 (1907)

[3] Hamel, G.:Eine Basis Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung: f(x+y)=f(x)+f(y). Math. Ann 60(3), 459-462(1942)

[4] Bernstein, S.N .: Ob odnom svoystve, harakterizuyushhem zakon Gaussa (in Russian) [On a characteristic property of the normal law]. Tr. leningr.Polytech. Inst.3,21-22 (1941)