ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

დოქტორანტი : გეგა გულაღაშვილი

ხელმძღვანელი : გია გიორგაძე

დოქტორანტის სემინარი 2

სარჩევი

აბსტრაქტი

წინამდებარე ნაშრომში შესწავლილია საკითხი თუ რა შემთხვევებში შეიძლება იყოს ტოლი ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემებისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციების გახლეჩვის ტიპები.

ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემებისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციების გახლეჩვის ტიპების შესახებ.

განვიხილოთ ფუქსის ტიპის წრფივ განტოლებათა სისტემები :

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{z - a_i}\right) y \tag{1}$$

განსნაკუთრებული წერტილებია $a_1 \dots a_m$ და მატრიცებია $B_1 \dots B_m$

და მეორე სისტემა :

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{\tilde{m}} \frac{\widetilde{B}_i}{z - \tilde{a}_i}\right) y \tag{2}$$

განსნაკუთრებული წერტილებია $\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_m$ და მატრიცებია $\widetilde{B}_1 \dots \widetilde{B}_{\tilde{m}}$

(1) და (2) სისტემები ინდუცირებენ ვექტორულ ფიბრაციებს F და $\tilde{F}$, რომლებსაც აქვთ თავისი შესაბამისი გახლეჩვის ტიპები.

(1) და (2) სისტემებს შეესაბამებათ რაციონალური მატრიცფუნქციები, რომლების კექძო ინდექსებიც ემთხვევიან F და $\tilde{F}$ ვექტორული ფიბრაციების გახლეჩვის ტიპებს. ვთქვათ ეს რაციონალური მატრიცფუნქციები არიან $T_1(z)$ და $T_2(z)$, მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ცალ-ცალკე თითოეულ მატრიცაში ყოველი წევრს აქვს ერთიდაიგივე მნიშვნელი :

$$T_1(z) = \left(\frac{t_{ij}(z)}{d\left(z - a_{s_1}\right)^{k_1} \dots \left(z - a_{s_r}\right)^{k_r}}\right) \text{ და } T_2(z) = \left(\frac{\tilde{t}_{ij}(z)}{\tilde{d}\left(z - \tilde{a}_{s_1}\right)^{\tilde{k}_1} \dots \left(z - \tilde{a}_{s_{\tilde{r}}}\right)^{\tilde{k}_{\tilde{r}}}}\right)$$

$a_{s_1}, \dots, a_{s_r} \in \{a_1, \dots, a_m\}$, $\tilde{a}_{s_1}, \dots, \tilde{a}_{s_{\tilde{r}}} \in \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\tilde{m}}\}$.

$t_{ij}(z) = \left(z - b_1^{ij}\right) \dots \left(z - b_n^{ij}\right) = z^n - \left(b_1^{ij} + \dots + b_n^{ij}\right) z^{n-1} + \dots + (-1)^n b_1^{ij} \dots b_n^{ij}$ და

$\tilde{t}_{ij}(z) = \left(z - \tilde{b}_1^{ij}\right) \dots \left(z - \tilde{b}_n^{ij}\right) = z^n - \left(\tilde{b}_1^{ij} + \dots + \tilde{b}_n^{ij}\right) z^{n-1} + \dots + (-1)^n \tilde{b}_1^{ij} \dots \tilde{b}_n^{ij}$.

განვიხილოთ $T_1(z)$ და $T_2(z)$ -ების ფაქტორიზაციები ე. ი. $T_1(z) = R_1(z) Z^{D_1} Q_1(z)$ და $T_2(z) = R_2(z) Z^{D_2} Q_2(z)$ სადაც $R_1(z)$ და $R_2(z)$ ჰოლომორფულად შებრუნებადებია $\mathbb{C}$ ზე, $Q_1(z)$ და $Q_2(z)$ ჰოლომორფულად შებრუნებადები არიან ∞ წერტილის მიდამოში, ხოლო D_1 და D_2

დიაგონალური მატრიცებია $D_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), D_2 = \mathrm{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha_1 \le \dots \le \alpha_n$ და $\beta_1 \le \dots \le \beta_n$ მთელი რიცხვებია.

$$\left(z - a_{s_1}\right)^{k_1} \dots \left(z - a_{s_r}\right)^{k_r} = z^u + d_1 z^{u-1} \dots + d_u = z^u \frac{z^u + d_1 z^{u-1} \dots + d_u}{z^u}, \text{სადაც } u = k_1 + \dots + k_r .$$

$$\left(z - \tilde{a}_{s_1}\right)^{\tilde{k}_1} \dots \left(z - \tilde{a}_{s_{\tilde{r}}}\right)^{\tilde{k}_r} = z^u + \tilde{d}_1 z^{u-1} \dots + \tilde{d}_u = z^u \frac{z^u + \tilde{d}_1 z^{u-1} \dots + \tilde{d}_u}{z^u}, \text{სადაც } u = \tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_{\tilde{r}} .$$

<u>თეორემა გახლეჩვის ტიპების შესახებ</u> :

თუ $\det\left(T_1(z)\right) \not\equiv 0$, $\det\left(T_2(z)\right) \not\equiv 0, k_1 + \dots + k_r = \tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_{\tilde{r}}$, $\deg\left(t_{ij}(z)\right) = \deg\left(\tilde{t}_{ij}(z)\right) = n$ და $\tilde{b}_1^{ij} = \lambda b_1^{ij}, \dots, \tilde{b}_n^{ij} = \lambda b_n^{ij}, \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, $t_{ij}(z)$ და $\tilde{t}_{ij}(z)$ პოლინომების უფროსი წევრების კოეფიციენტები ტოლია 1 ის $\forall\, i, j \in \{1 \dots p\}$, მაშინ (1) და (2) სისტემებისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციების გახლეჩვის ტიპები ერთმანეთის ტოლია.

<u>დამტკიცება</u> :

განვიხილოთ $t_{ij}(z)$ და $\tilde{t}_{ij}(z)$ პოლინომები $t_{ij}(z) = \left(z - b_1^{ij}\right) \dots \left(z - b_n^{ij}\right) = z^n - \left(b_1^{ij} + \dots + b_n^{ij}\right) z^{n-1} + \dots + (-1)^n b_1^{ij} \dots b_n^{ij}$ და $\tilde{t}_{ij}(z) = \left(z - \tilde{b}_1^{ij}\right) \dots \left(z - \tilde{b}_n^{ij}\right) = z^n - \left(\tilde{b}_1^{ij} + \dots + \tilde{b}_n^{ij}\right) z^{n-1} + \dots + (-1)^n \tilde{b}_1^{ij} \dots \tilde{b}_n^{ij}$.

ამ პოლინომის წევრების კეოფიციენტები არიან $b_1^{ij} \dots b_{ij}^{ij}$–ისა და $\tilde{b}_1^{ij} \dots \tilde{b}_n^{ij}$–ის სიმეტრიული გამოსახულებები (ხოლო თუ $b_1^{ij} \dots b_{ij}^{ij}$-ებსა და $\tilde{b}_1^{ij} \dots \tilde{b}_n^{ij}$–ებს განვიხილებთ ცვლადებად და არა კომპლექსურ რიცხვებად, მაშინ $t_{ij}(z)$ და $\tilde{t}_{ij}(z)$ კოეფიციენტები გამოდიან $b_1^{ij} \dots b_{ij}^{ij}$ და $\tilde{b}_1^{ij} \dots \tilde{b}_n^{ij}$–ის ცვლადების სიმეტრიული პოლინომები).

თუ $\tilde{b}_1^{ij} = \lambda b_1^{ij}, \dots, \tilde{b}_n^{ij} = \lambda b_n^{ij}, \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ მაშინ

$$\tilde{t}_{ij}(z) = c\left(z - \lambda b_1^{ij}\right) \dots \left(z - \lambda b_n^{ij}\right) = c z^n - \lambda c\left(b_1^{ij} + \dots + b_n^{ij}\right) z^{n-1} + \dots + \lambda^n c (-1)^n b_1^{ij} \dots b_n^{ij}$$

რანაირია ერთი ელემენტარული მოქმედება $T_1(z)$ და $T_2(z)$ მატრიცებისათვის ? :

$$d \cdot \frac{z^u + d_1 z^{u-1} \dots + d_u}{z^u} T_1(z) = \left(\frac{z^n - \left(b_1^{ij} + \dots + b_n^{ij}\right) z^{n-1} + \dots + (-1)^n b_1^{ij} \dots b_n^{ij}}{z^u}\right) =$$

$$= \left(z^{n-u} - \left(b_1^{ij} + \dots + b_n^{ij}\right) z^{n-1-u} + \dots + (-1)^n b_1^{ij} \dots b_n^{ij} z^{-u}\right) \qquad (1).$$

$$\tilde{d}\cdot\frac{z^{u}+\tilde{d}_1 z^{u-1}\dots+\tilde{d}_u}{z^{u}}T_2(z)=\left(\frac{z^{n}-\lambda\left(b_1^{ij}+\cdots+b_n^{ij}\right)z^{n-1}+\cdots+\lambda^{n}(-1)^{n}b_1^{ij}\dots b_n^{ij}}{z^{u}}\right)=$$

$$=\left(z^{n-u}-\lambda\left(b_1^{ij}+\cdots+b_n^{ij}\right)z^{n-1-u}+\cdots+\lambda^{n}(-1)^{n}b_1^{ij}\dots b_n^{ij}z^{-u}\right) \qquad (2).$$

რადგან (1) და (2) მატრიცებში ყოველი ელემენტი ერთიდაიგივე ხარისხის წევრებისაგან შედგება, ამიტომ საჭიროა მხოლოდ სტრიქონს დავუმატოთ სხვა სტრიქონი გამრავლებული $\mathbb{C}$ ველის არანულოვან ელემენტზე ე. ი. ამ მოქმედების შედეგად გვიწევს რომელიღაც i ნომრის სტრიქონს მივუმატოთ რომელიღაც k ნომრის სტრიქონი გამრავლებული $\mathbb{C}$ ველის არანულოვან α ელემენტზე, იკრიბებიან (k,j) და (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტები და საბოლოო შედეგი იწერება i ნომრის მქონე სტრიქონში.

(1) მატრიცაში :

k-ური სტრიქონის (k,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$z^{n-u}-\left(b_1^{kj}+\cdots+b_n^{kj}\right)z^{n-1-u}+\cdots+(-1)^{n}b_1^{kj}\dots b_n^{kj}z^{-u}$$

i-ური სტრიქონის (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$z^{n-u}-\left(b_1^{ij}+\cdots+b_n^{ij}\right)z^{n-1-u}+\cdots+(-1)^{n}b_1^{ij}\dots b_n^{ij}z^{-u}$$

i სტრიქონი $+\ \alpha\cdot k$ სტრიქონი, მოქმედების შედეგად მიღებული i-ური სტრიქონის (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$z^{n-u}-\left(b_1^{ij}+\cdots+b_n^{ij}\right)z^{n-1-u}+\cdots+(-1)^{n}b_1^{ij}\dots b_n^{ij}z^{-u}+$$
$$\alpha z^{n-u}-\alpha\left(b_1^{kj}+\cdots+b_n^{kj}\right)z^{n-1-u}+\cdots+\alpha(-1)^{n}b_1^{kj}\dots b_n^{kj}z^{-u}=$$

$$(1+\alpha)z^{n-u}-\left(\left(b_1^{ij}+\cdots+b_n^{ij}\right)+\alpha\left(b_1^{kj}+\cdots+b_n^{kj}\right)\right)z^{n-1-u}+\cdots+$$

$$+\left((-1)^{n}b_1^{ij}\dots b_n^{ij}+\alpha(-1)^{n}b_1^{kj}\dots b_n^{kj}\right)z^{-u}.$$

(2) მატრიცაში :

k-ური სტრიქონის (k,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$z^{n-u}-\left(\tilde{b}_1^{kj}+\cdots+\tilde{b}_n^{kj}\right)z^{n-1-u}+\cdots+(-1)^{n}\tilde{b}_1^{kj}\dots\tilde{b}_n^{kj}z^{-u}=$$

$$z^{n-u}-\lambda\left(b_1^{kj}+\cdots+b_n^{kj}\right)z^{n-1-u}+\cdots+\lambda^{n}(-1)^{n}b_1^{kj}\dots b_n^{kj}z^{-u}$$

i-ური სტრიქონის (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$z^{n-u}-\left(\tilde{b}_1^{ij}+\cdots+\tilde{b}_n^{ij}\right)z^{n-1-u}+\cdots+(-1)^n\tilde{b}_1^{ij}\dots\tilde{b}_n^{ij}z^{-u}=$$

$$z^{n-u}-\lambda\left(b_1^{ij}+\cdots+b_n^{ij}\right)z^{n-1-u}+\cdots+\lambda^n(-1)^n b_1^{ij}\dots b_n^{ij}z^{-u}$$

i სტრიქონი $+\ \alpha\cdot k$ სტრიქონი, მოქმედების შედეგად მიღებული i-ური სტრიქონის (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$z^{n-u}-\left(\tilde{b}_1^{ij}+\cdots+\tilde{b}_n^{ij}\right)z^{n-1-u}+\cdots+(-1)^n\tilde{b}_1^{ij}\dots\tilde{b}_n^{ij}z^{-u}+$$
$$\alpha z^{n-u}-\alpha\left(\tilde{b}_1^{kj}+\cdots+\tilde{b}_n^{kj}\right)z^{n-1-u}+\cdots+\alpha(-1)^n\tilde{b}_1^{kj}\dots\tilde{b}_n^{kj}z^{-u}=$$

$$(1+\alpha)z^{n-u}-\left(\left(\tilde{b}_1^{ij}+\cdots+\tilde{b}_n^{ij}\right)+\alpha\left(\tilde{b}_1^{kj}+\cdots+\tilde{b}_n^{kj}\right)\right)z^{n-1-u}+\cdots+$$

$$+\left((-1)^n\tilde{b}_1^{ij}\dots\tilde{b}_n^{ij}+\alpha(-1)^n\tilde{b}_1^{kj}\dots\tilde{b}_n^{kj}\right)z^{-u}=(1+\alpha)z^{n-u}-$$

$$-\left(\lambda\left(b_1^{ij}+\cdots+b_n^{ij}\right)+\alpha\lambda\left(b_1^{kj}+\cdots+b_n^{kj}\right)\right)z^{n-1-u}\dots\left(\lambda^n(-1)^n b_1^{ij}\dots b_n^{ij}+\lambda^n\alpha(-1)^n b_1^{kj}\dots b_n^{kj}\right)z^{-u}$$

$$=(1+\alpha)z^{n-u}-\lambda\left(\left(b_1^{ij}+\cdots+b_n^{ij}\right)+\alpha\left(b_1^{kj}+\cdots+b_n^{kj}\right)\right)z^{n-1-u}+\cdots+$$

$$+\lambda^n\left((-1)^n b_1^{ij}\dots b_n^{ij}+\alpha(-1)^n b_1^{kj}\dots b_n^{kj}\right)z^{-u}.$$

ე. ი. ამ მოქმედების შედეგად მიღებულ მატრიცებში (i,j) ნომრებზე მყოფი წევრები შედგებიან $z-$ის ერთიდაიგივე ხარისხებისგან, ხოლო $z-$ის ერთიდაიგივე ხარისხების კოეფიციენტები მიღებულ მატრიცებში ერთიდაიგივე არანულოვანი მამრავლებით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან და ეს მამრავლებია $\lambda-$ს ხარისხები, $\forall\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C},\ \alpha\neq 0$.

ეს ნიშნავს, რომ :

გაბათილდა წევრი (1) მატრიცის შემთხვევაში $\Leftrightarrow$ გაბათილდა შესაბამისი წევრი (2) მატრიცის შემთხვევაში.

არ გაბათილდა წევრი (1) მატრიცის შემთხვევაში $\Leftrightarrow$ არ გაბათილდა შესაბამისი წევრი (2) მატრიცის შემთხვევაში.

ეს კი ნიშნავს, რომ :

ისევ გვჭირდება მხოლოდ სტრიქონს დავუმატოთ სხვა სტრიქონი გამრავლებული $\mathbb{C}$ ველის არანულოვან ელემენტზე ე. ი. რომელიღაც i ნომრის სტრიქონს მივუმატოთ რომელიღაც k ნომრის სტრიქონი გამრავლებული $\mathbb{C}$ ველის არანულოვან β ელემენტზე, იკრიბებიან (k,j) და (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტები და საბოლოო შედეგი იწერება i ნომრის მქონე სტრიქონში ე. ი. :

(1) მატრიცის შემთხვევაში :

k-ური სტრიქონის (k,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$c_{kj}^{1}z^{n_1}+c_{kj}^{2}z^{n_1-1}+\cdots+c_{kj}^{n_2}z^{n_2}$$

i-ური სტრიქონის (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$c_{ij}^{1}z^{n_1}+c_{ij}^{2}z^{n_1-1}+\cdots+c_{ij}^{n_2}z^{n_2}$$

i სტრიქონი $+\ \beta\cdot\mathrm{k}$ სტრიქონი, მოქმედების შედეგად მიღებული i-ური სტრიქონის (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$c_{ij}^{1}z^{n_1}+c_{ij}^{2}z^{n_1-1}+\cdots+c_{ij}^{n_2}z^{n_2}+\beta c_{kj}^{1}z^{n_1}+\beta c_{kj}^{2}z^{n_1-1}+\cdots+\beta c_{kj}^{n_2}z^{n_2}=$$

$$=\left(c_{ij}^{1}+\beta c_{kj}^{1}\right)z^{n_1}+\left(c_{ij}^{2}+\beta c_{kj}^{2}\right)z^{n_1-1}+\cdots+\left(c_{ij}^{n_2}+\beta c_{kj}^{n_2}\right)z^{n_2}.$$

(2) მატრიცის შემთხვევაში :

$\mathrm{z}-$ის ერთიდაიგივე ხარისხების კოეფიციენტები ერთიდაიგივე $\lambda-$ს ხარისხებისაგან განსხვავდებიან :

k-ური სტრიქონის (k,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$\lambda^{t_1}c_{kj}^{1}z^{n_1}+\lambda^{t_2}c_{kj}^{2}z^{n_1-1}+\cdots+\lambda^{t_{n_2}}c_{kj}^{n_2}z^{n_2}$$

i-ური სტრიქონის (i,j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$\lambda^{t_1}c_{ij}^{1}z^{n_1}+\lambda^{t_2}c_{ij}^{2}z^{n_1-1}+\cdots+\lambda^{t_{n_2}}c_{ij}^{n_2}z^{n_2}$$

i სტრიქონი + $\beta \cdot k$ სტრიქონი, მოქმედების შედეგად მიღებული i-ური სტრიქონის (i, j) ნომრებზე მდგომი ელემენტი :

$$\lambda^{t_1} c_{ij}^1 z^{n_1} + \lambda^{t_2} c_{ij}^2 z^{n_1 - 1} + \cdots + \lambda^{t_{n_2}} c_{ij}^{n_2} z^{n_2} + \beta \lambda^{t_1} c_{kj}^1 z^{n_1} + \beta \lambda^{t_2} c_{kj}^2 z^{n_1 - 1} + \cdots + \beta \lambda^{t_{n_2}} c_{kj}^{n_2} z^{n_2} =$$

$$= \lambda^{t_1} \left(c_{ij}^1 + \beta c_{kj}^1\right) z^{n_1} + \lambda^{t_2} \left(c_{ij}^2 + \beta c_{kj}^2\right) z^{n_1 - 1} + \cdots + \lambda^{t_{n_2}} \left(c_{ij}^{n_2} + \beta c_{kj}^{n_2}\right) z^{n_2}.$$

მიღებულ მატრიცებში (i, j) ნომრებზე მყოფი წევრები შედგებიან $z -$ ის ერთიდაიგივე ხარისხებისგან, ხოლო $z -$ ის ერთიდაიგივე ხარისხების კოეფიციენტები მიღებულ მატრიცებში ერთიდაიგივე არანულოვანი მამრავლებით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან და ეს მამრავლებია $\lambda -$ს ხარისხები, $\forall \beta,\ \ \beta \in \mathbb{C},\ \beta \neq 0$ ე. ი.

ბათილდება წევრი (1) მატრიცის შემთხვევაში $\Leftrightarrow$ ბათილდება შესაბამისი წევრი (2) მატრიცის შემთხვევაში.

არ ბათილდება წევრი (1) მატრიცის შემთხვევაში $\Leftrightarrow$ არ ბათილდება შესაბამისი წევრი (2) მატრიცის შემთხვევაში.

და ისევ გვჭირდება, რომ სტრიქონს დავუმატოთ სხვა სტრიქონი გამრავლებული $\mathbb{C}$ ველის არანულოვან ელემენტზე.

(1) და (2) მატრიცის შემთხვევაში, $z -$ ის ხარისხების გამორიცხვას ერთიდაიგივე მოქმედებები სჭირდება.

ე. ი. საბოლოოდ მიღებულ მატრიცებში (i, j) ნომრებზე გვექნება $z -$ ის ერთიდაიგივე ხარისხებისგან შედგენილი წევრები. ე. ი. გამოვიდა, რომ ყოველ ჯერზე მიიღებიან მატრიცები, რომლებიც $z -$ ის ერთიდაიგივე ხარისხებისაგან შედგებიან. ხოლო D_1და D_2 მატრიცების ყოველი წევრი არის ალგორითმის პროცესში მიღებულ რომელიღაც მატრიცაში მყოფი $z -$ ის ხარისხი ($z -$ ის რომელი ხარისხი უნდა იყოს ამაზე გავლენას ვერ ახდენს წევრის არანულოვანი კოეფიციენტი).ჩვენს შემთხვევაში კი ყოველთვის ერთიდაიგივე $z -$ ის ხარისხები გვაქვს. ამის გამო კი $D_1 = D_2$ განსხვავებულები შეიძლება იყვნენ $R_1(z), R_2(z)$ და $Q_1(z), Q_2(z)$ მატრიცფუნქციები ე. ი. (1) და (2) სისტემებისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციების გახლეჩვის ტიპები ერთმანეთის ტოლია.

გამოყენებული ლიტერატურა :

1. А. А. Рябов - Типы расщеплений векторных расслоений, построенных по монодромии заданной фуксовой системы , 2004.
2. А.Болибрух, Фуксовые дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. МЦНМО, 2000.