ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ჩარნი-ობუხოვისა და ჰასაგევა-მიმას განტოლებებისათვის ნახევრად დისკრეტული სქემები და ერთადერთობის თეორემები

დოქტორანტის სემინარი I

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ასოცირებული პროფესორი ჯემალ როგავა
დოქტორანტი: ქეთევან გომიაშვილი

თბილისი
2019 წელი

სარჩევი

შესავალი

გეოფიზიკური დინებების აღმწერი ჩარნი-ობუხოვისა და მისი ანალოგიური, მაგნიტურ ველში მოთავსებული ლაბორატორიული პლაზმური შეშფოთებების გავრცელების ამსახველი, ჰასეგავა-მიმას არაწრფივი განტოლებების (იხ. [4], [6], [14], [16]) ფიზიკური კუთხით შესწავლა ინტენსიურად დაიწყო გასული საუკუნის 80–იანი წლებიდან (იხ. [2], [3], [5-7], [9-15], [17], [20], [21]). რამდენადაც ჩვენთვის ცნობილია, ეს განტოლებები მათემატიკური კუთხით ნაკლებად არის შესწავლილი. არ არის ცნობილი ამ განტოლებისათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის თეორემები. არ არის ასევე დამტკიცებული ამონახსნის ერთადერთობის თეორემა. თუმცა ისიც უნდა ითქვას, რომ ამონახსნის ერთადერთობა მარტივად მტკიცდება სტანდარტული გზით და არ მოითხოვს დიდ ძალისხმევას.

რაც შეეხება ჩარნი-ობუხოვის განტოლებისათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის საკითხს, აქ რიცხვითი ექსპერიმენტის თვალსაზრისით მნიშვნელოვანი ნაბიჯია გადაგმული (იხ. [2], [3], [7], [9-15], [21]). უნდა აღინიშნოს, რომ რიცხვითი გათვლისთვის ძირითადად მიმართავენ ლაქს-ვენდროფის ტიპის ცხად სქემებს (იხ. მაგ. [19]). იაკობიანის აპროქსიმაციისთვის იყენებენ [1] ნაშრომში შემოთავაზებულ სქემებს. როგორც ცნობილია, არაწრფივი ამოცანებისათვის ცხადი სქემების მდგრადობის მარაგი მცირეა, ამიტომ არაწრფივი ამოცანების რიცხვითი გათვლისთვის მიზანშეწონილად მიგვაჩნია არაცხადი სქემების გამოყენება, რომელთა მდგრადობის მარაგი საკმაოდ მაღალია. შევნიშნოთ, რომ ეს არაცხადი სხვაობიანი სქემა მიიღება წინამდებარე ნაშრომში განხილული პირველი რიგის ნახევრად დისკრეტული სქემიდან, თუ სივრცითი კოორდინატების მიხედვით წარმოებულებს შევცვლით ცენტრალური სხვაობებით.

კარგად არის ცნობილი ის ფაქტი, რომ პრაქტიკული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის მეთოდი სრულიად მისაღებია გამოყენებითი დარგის სპეციალისტებისათვის, თუ რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები თანხმობაშია რეალურ ექსპერიმენტთან და ნაკლებად საინტერესოა მათთვის თვით მეთოდის დაფუძნების საკითხი. სწორედ ასეთი მდგომარეობაა ამ შემთხვევაში. თითქმის არ გვხდება ნაშრომი, რომელიც ეხება ჩარნი-ობუხოვის განტოლებისათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის რიცხვით ამოხსნის მეთოდის დაფუძნებას. ეს გამოწვეულია იმით, რომ ჩარნი-ობუხოვის განტოლება არ მიეკუთნება, რომელიმე კლასიკურ ტიპს. ის ერთი შეხედვით ახლოს არის პარაბოლურთან, მაგრამ გამოკვეთილი ელიფსური ნაწილი (თუნდაც არაწრფივი) არ გვაქვს. არაწრფივი ნაწილი სივრცითი კოორდინატის მიხედვით აქ წარმოდგენილია იაკობიანის სახით, რომელსაც ფიზიკოსები უწოდებენ ვექტორულ არაწრფივობას.

თავი 1. ერთადერთობის თეორემა და ნახევრადდისკრეტული სქემა ჩარნი-ობუხოვის განტოლებისათვის

1.1 ამოცანის დასმა და ნახევრად დისკრეტული სქემა

უგანზომილებო ცვლადებში ჩარნი-ობუხოვის არაწრფივი განტოლება OX ღერძის გასწვრივ v სიჩქარით მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში ჩაიწერება შემდეგი სახით (იხ. [1-4]):

$$\frac{\partial(\Delta\psi-\gamma\psi)}{\partial t}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}-v\frac{\partial(\Delta\psi-\gamma\psi)}{\partial x}+J(\psi,\Delta\psi)=0\,, \tag{1.1}$$

+სადაც β და γ დადებითი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან გარემოს ფიზიკური მახასიათებლების საშუალებით. $\psi(x,y,t)$-ს უწოდებენ დენის ფუნქციას. $J(\psi,\Delta\psi)$ არის იაკობიანი,

$$J(\psi,\Delta\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x}\,.$$

ცხადია (1.1) განტოლება ეკვივალენტურია სისტემის:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}-v\frac{\partial W}{\partial x}+J(\psi,W)=0, \tag{1.2}$$

$$\Delta\psi-\gamma\psi=W. \tag{1.3}$$

(1.2), (1.3) სისტემას ვიხილავთ $(x,y,t)\in Q_T=\Omega\times]0;T[$ ცილინდრულ არეში, სადაც Ω არის ერთეულოვანი კვადრატი: $\Omega=]0;1[\times]0;1[$. შევნიშნოთ, რომ $W(x,y,t)$ ფუნქციას უწოდებენ გრიგალს.

დავსვათ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$W(x,y,0)=W_0(x,y)\,, \tag{1.4}$$

$$W(0,y,t)=W(1,y,t)\,,\qquad W(x,0,t)=W(x,1,t)\,, \tag{1.5}$$

$$\psi(0,y,t)=\psi(1,y,t)\,,\qquad \psi(x,0,t)=\psi(x,1,t)\,, \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=1},\qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=1},\qquad \forall t\in[0;T]\,. \tag{1.7}$$

შემოვიღოთ დროითი ბიჯი $\tau=T/n$ ($n>1$ ნატურალური რიცხვია). (1.2) განტოლება (x,y,t_k) წერტილში, სადაც $t_k=k\tau\quad(k=1,2,...,n)$, ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{W_k-W_{k-1}}{\tau}+\beta\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial x}-v\frac{\partial W_k}{\partial x}+\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial x}\frac{\partial W_k}{\partial y}-\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial y}\frac{\partial W_k}{\partial x}=R_k(x,y)\,, \tag{1.8}$$

სადაც $W_k(x,y)=W(x,y,t_k)\,,\quad \psi_k(x,y)=\psi(x,y,t_k)$ და

$$R_k(x,y) = -\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(W_t'(x,y,t_k) - W_t'(x,y,t))dt -$$

$$-\beta\frac{\partial\hat{\psi}_k}{\partial x} - J(\hat{\psi}_k, W_k), \quad \hat{\psi}_k(x,y) = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\psi_t'(x,y,t)dt.$$

ცხადია ამონახსნთა საკმარისად გლუვ კლასში $R_k(x,y)$ ნაშთითი წევრი არის $O(\tau)$ რიგის. კერძოდ, თუ $(W,\psi)\in C^{1,2}(\overline{Q}_T)\times C^{1,1}(\overline{Q}_T)$ და ამასთან უწყვეტია შერეული წარმოებულები $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$ და $\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}$, მაშინ მართებულია შეფასება:

$$\max_{(x,y)\in\Omega}\left|R_k(x,y)\right| \le c\,\tau, \quad c = const > 0. \tag{1.9}$$

თუ (1.8)-ში გადავაგდებთ $R_k(x,y)$ ნაშთით წევრს და მიღებულ განტოლებას გავაერთიანებთ (1.3) განტოლებასთან, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\frac{\widetilde{W}_k - \widetilde{W}_{k-1}}{\tau} + \beta\frac{\partial\widetilde{\psi}_{k-1}}{\partial x} - \nu\frac{\partial\widetilde{W}_k}{\partial x} + \frac{\partial\widetilde{\psi}_{k-1}}{\partial x}\frac{\partial\widetilde{W}_k}{\partial y} - \frac{\partial\widetilde{\psi}_{k-1}}{\partial y}\frac{\partial\widetilde{W}_k}{\partial x} = 0, \tag{1.10}$$

$$\Delta\widetilde{\psi}_k - \gamma\widetilde{\psi}_k = \widetilde{W}_k, \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{1.11}$$

სადაც $\widetilde{W}_k(x,y)$ და $\widetilde{\psi}_k(x,y)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1.5)-(1.7) პერიოდულ სასაზღვრო პირობებს; $\widetilde{\psi}_0(x,y)$ მოცემული ფუნქციაა.

ბუნებრივია (1.10), (1.11) სისტემის $(\widetilde{W}_k(x,y);\widetilde{\psi}_k(x,y))$ ამონახსნი გამოვაცხადოთ (1.2)-(1.7) უწყვეტი ამოცანის ზუსტი ამონახსნის $(W(x,y,t);\psi(x,y,t))$-ის მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_k$ წერტილში, $(W(x,y,t_k);\psi(x,y,t_k)) \approx (\widetilde{W}_k(x,y);\widetilde{\psi}_k(x,y))$.

ამრიგად (1.2)-(1.7) არაწრფივი ამოცანის ამოხსნა ჩვენ დავიყვანეთ (1.10), (1.11) წრფივი სისტემის ამოხსნაზე (ცხადია (1.10) განტოლება ლოკალურად წრფივია ყოველ $t=t_k$ წერტილში).

ამოხსნის სქემა ასეთია: $k=1$-თვის, ვიცით რა $\widetilde{\psi}_0(x,y)$ და $\widetilde{W}_0(x,y)$ (1.10) წრფივი განტოლებიდან ვპოულობთ $\widetilde{W}_1(x,y)$. (1.11) განტოლებიდან $\widetilde{W}_1(x,y)$-ის საშუალებით ვპოულობთ $\widetilde{\psi}_1(x,y)$. $k=2$-თვის, $\widetilde{\psi}_1(x,y)$ და $\widetilde{W}_1(x,y)$ ვსვამთ (1.10)-ში და ვპოულობთ $\widetilde{W}_2(x,y)$. შემდეგ მისი საშუალებით (1.11)-დან ვპოულობთ $\widetilde{\psi}_2(x,y)$ და ა. შ.

(1.2)-(1.7) არაწრფივი ამოცანის ამოხსნის სქემას, რომელიც მოიცემა (1.10), (1.11) სისტემის საშუალებით, ჩვენ ვუწოდებთ ნახევრადდისკრეტულ სქემას (როგორც ეს მიღებულია), რადგან ის მიიღება (1.2)-(1.7) უწყვეტი ამოცანის ერთერთი ცვლადის (კერძოდ დროითი ცვლადის) მიხედვით დისკრეტიზაციის შედეგად.

1.2 სხვაობიანი სქემის ამონახსნის თანაბარი შემოსაზღვრულობა

ვთქვათ (1.10), (1.11) სისტემის ამონახსნი $(\tilde{W}_k(x,y);\psi_k(x,y)) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega})$.
ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.
თეორემა 1. მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|\tilde{W}_k\right\| \le \exp(ct_k)\left\|\tilde{W}_0\right\|, \tag{1.12}$$

$$\left\|\tilde{\psi}_k\right\|_2^{(1)} \le c\exp(ct_k)\left\|\tilde{W}_0\right\|, \qquad c = const > 0, \quad k = 1,2,\dots,n, \tag{1.13}$$

სადაც $\|\cdot\|_2^{(1)}$ არის ნორმა სობოლევის $W_2^1(\Omega)$ სივრცეში, ხოლო $\|\cdot\|$ - $L_2(\Omega)$-ში.

დამტკიცება. (1.10) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\tilde{W}_k$-ზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე, მივიღებთ:

$$\left\|\tilde{W}_k\right\|^2 - (\tilde{W}_{k-1},\tilde{W}_k) + \tau\beta\left(\frac{\partial\tilde{\psi}_{k-1}}{\partial x},\tilde{W}_k\right) - \tau\nu\left(\frac{\partial\tilde{W}_k}{\partial x},\tilde{W}_k\right) + \tau(J(\tilde{\psi}_{k-1},\tilde{W}_k),\tilde{W}_k) = 0, \tag{1.14}$$

სადაც

$$\left\|\tilde{W}_k\right\|^2 = \int_\Omega \tilde{W}_k^2\,dxdy, \qquad (\tilde{W}_{k-1},\tilde{W}_k) = \int_\Omega \tilde{W}_{k-1}\tilde{W}_k\,dxdy.$$

რადგან $\tilde{W}_k(x,y)$ აკმაყოფილებს პერიოდულ სასაზღვრო პირობებს, ამიტომ გვაქვს:

$$\left(\frac{\partial\tilde{W}_k}{\partial x},\tilde{W}_k\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial\tilde{W}_k^{\,2}}{\partial x}dxdy == \frac{1}{2}\int_0^1 (\tilde{W}_k^{\,2}(1,y,t) - \tilde{W}_k^{\,2}(0,y,t))dy = 0. \tag{1.15}$$

ვაჩვენოთ, რომ მართებულია ტოლობა (ქვემოთ, სიმარტივისთვის $\tilde{W}_k$ და $\tilde{\psi}_k$ ნაცვლად დავწეროთ $\tilde{W}$ და $\tilde{\psi}$):

$$(J(\tilde{\psi},\tilde{W}),\tilde{W}) = \int_\Omega J(\tilde{\psi},\tilde{W})\tilde{W}\,dxdy = 0, \tag{1.16}$$

სადაც $\tilde{W}$ და $\tilde{\psi}$ აკმააყოფილებენ (1.5)-(1.7) პერიოდულ სასაზღვრო პირობებს.
მართლაც გვაქვს:

$$\int_\Omega J(\tilde{\psi},\tilde{W})\tilde{W}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{W}^2}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{W}^2}{\partial x}\right)dxdy = \frac{1}{2}\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{W}^2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{W}^2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\right)\right]dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{W}^2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)dy - \frac{1}{2}\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{W}^2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\tilde{W}^2(x,1,t)\frac{\partial\tilde{\psi}(x,1,t)}{\partial x} - \tilde{W}^2(x,0,t)\frac{\partial\tilde{\psi}(x,0,t)}{\partial x}\right)dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\tilde{W}^2(1,y,t)\frac{\partial\tilde{\psi}(1,y,t)}{\partial y} - \tilde{W}^2(0,y,t)\frac{\partial\tilde{\psi}(0,y,t)}{\partial y}\right)dy = 0.$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ პირობები:

$$\frac{\partial\tilde{\psi}(x,1,t)}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{\psi}(x,0,t)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\tilde{\psi}(1,y,t)}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{\psi}(0,y,t)}{\partial y},$$

რომლებიც გამომდინარეობს (1.6) სასაზღვრო პირობებიდან.

ცხადია (1.14)-დან (1.15) და (1.16)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\left\|\tilde{W}_k\right\|^2 \le \left|(\tilde{W}_{k-1},\tilde{W}_k)\right| + \tau\beta\left|\left(\frac{\partial\tilde{\psi}_{k-1}}{\partial x},\tilde{W}_k\right)\right|.$$

აქედან შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\left\|\tilde{W}_k\right\|^2 \le \left\|\tilde{W}_{k-1}\right\|\left\|\tilde{W}_k\right\| + \tau\beta\left\|\frac{\partial\tilde{\psi}_{k-1}}{\partial x}\right\|\left\|\tilde{W}_k\right\|. \tag{1.17}$$

როგორც ცნობილია, თუ (1.11) განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ $\tilde{\psi}$-ზე და ვაინტეგრებთ Ω არეზე, ამასთან გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას და გავითვალისწინებთ რომ $\tilde{\psi}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პერიოდულ სასაზღვრო პირობებს, მაშინ მივიღებთ (იხ. მაგ. [18]):

$$\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\right)^2\right)dxdy+\gamma\int_\Omega\tilde{\psi}^2dxdy=-\int_\Omega\tilde{W}\tilde{\psi}dxdy. \tag{1.18}$$

შვარცის უტოლობისა და ε-უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_\Omega\left|\tilde{W}\tilde{\psi}\right|dxdy \le \left(\int_\Omega\tilde{W}^2dxdy\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\tilde{\psi}^2dxdy\right)^{1/2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega\tilde{W}^2dxdy+\varepsilon^2\int_\Omega\tilde{\psi}^2dxdy\right). \tag{1.19}$$

შევარჩიოთ $\varepsilon>0$, ისე რომ შესრულდეს პირობა:

$$\gamma_0=\gamma-\frac{1}{2}\varepsilon^2>0,$$

მაშინ (1.18)-დან (1.19)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\right)^2\right)dxdy+\gamma_0\int_\Omega\tilde{\psi}^2dxdy\le c_0\int_\Omega\tilde{W}^2dxdy, \qquad c_0=const>0. \tag{1.20}$$

(1.17)-დან (1.20)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\left\|\tilde{W}_k\right\|\le(1+c\tau)\left\|\tilde{W}_{k-1}\right\|, \qquad c=const>0.$$

აქედან კი ცხადია გამომდინარეობს (1.12) შეფასება. შეფასება (1.13) გამომდინარეობს (1.20)-დან (1.12)-ის გათვალისწინებით.

შენიშვნა 1. მართებულია შეფასება:

$$\|\tilde{\psi}_k\|_2^{(2)} \le c\|\tilde{W}_k\|, \qquad c = const > 0, \tag{1.21}$$

სადაც $\|\cdot\|_2^{(2)}$ არის ნორმა სობოლევის $W_2^2(\Omega)$ სივრცეში.

მართლაც, გვაქვს (ქვემოთ, სიმარტივისთვის $\tilde{W}_k$ და $\tilde{\psi}_k$ ნაცვლად დავწერთ $\tilde{W}$ და $\tilde{\psi}$):

$$\|\tilde{W}\|^2 = \int_\Omega (\Delta\tilde{\psi} - \gamma\tilde{\psi})^2 dxdy = \int_\Omega [(\Delta\tilde{\psi})^2 - 2\gamma(\Delta\tilde{\psi})\tilde{\psi} + \gamma^2\tilde{\psi}^2)dxdy =$$

$$= \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial y^2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial y^2} + 2\gamma\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right)^2 + 2\gamma\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\right)^2 + \gamma^2\tilde{\psi}^2 \right] dxdy. \tag{1.22}$$

(1.6) და (1.7) პირობების თანახმად გვაქვს:

$$\int_\Omega \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial y^2} dxdy = \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^3\tilde{\psi}}{\partial x\partial y^2} \right] dxdy = -\int_\Omega \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^3\tilde{\psi}}{\partial x\partial y^2} dxdy =$$

$$= -\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial y}\right)^2 \right] dxdy = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x\partial y}\right)^2 dxdy.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით (1.22)-დან გამომდინარეობს (1.12).

შენიშვნა 2. (1.21) და (1.22) უტოლობებიდან სობოლევის ჩადგმის თეორემის თანახმად გამომდინარეობს (იხ. მაგ. [18]):

$$\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |\tilde{\psi}_k(x,y)| \le c\exp(ct_k)\|\tilde{W}_0\|, \qquad c = const > 0, \quad k = 1,2,\dots,n. \tag{1.23}$$

1.3 მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება

როგორც ადრე ავღნიშნეთ (1.10), (1.11) სისტემის $(\tilde{W}_k;\tilde{\psi}_k)$ ამონახსნი გამოვაცხადეთ (1.2)-(1.7) უწყვეტი ამოცანის ზუსტი ამონახსნის $(W;\psi)$-ის მიახლოებით მნიშვნელობად $t = t_k$ წერტილში, $(W_k;\psi_k) \approx (\tilde{W}_k;\tilde{\psi}_k)$. ცხადია ცდომილება იქნება: $(W_k - \tilde{W}_k;\psi_k - \tilde{\psi}_k)$.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2. ვთქვათ (1.2)-(1.7) ამოცანის ამონახსნი $(W;\psi) \in C^{1,2}(\overline{Q}_T) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, ამასთან უწყვეტია შერეული წარმოებულები $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$ და $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}$. მაშინ მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\|W_k - \widetilde{W}_k\| \le \exp(ct_k)(\|W_0 - \widetilde{W}_0\| + c\tau)\,, \tag{1.24}$$

$$\|\psi_k - \widetilde{\psi}_k\|_2^{(1)} \le c\exp(ct_k)(\|W_0 - \widetilde{W}_0\| + c\tau)\,, \qquad c = const > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.25}$$

სადაც $\|\cdot\|_2^{(1)}$ არის ნორმა სობოლევის $W_2^1(\Omega)$ სივრცეში, ხოლო $\|\cdot\|$-$L_2(\Omega)$-ში.

დამტკიცება. (1.8) და (1.10) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \beta\frac{\partial\varsigma_{k-1}}{\partial x} - \nu\frac{\partial u_k}{\partial x} + J(\widetilde{\psi}_{k-1}, u_k) + J(\varsigma_{k-1}, W_k) = R_k(x,y)\,, \tag{1.26}$$

სადაც $(u_k; \varsigma_k) = (W_k - \widetilde{W}_k; \psi_k - \widetilde{\psi}_k)$.

ცხადია ასევე, რომ (1.3) და (1.11) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$\Delta\varsigma_k - \gamma\varsigma_k = u_k \tag{1.27}$$

(1.26) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ u_k-ზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე, მივიღებთ:

$$\begin{gathered}\|u_k\|^2 - (u_{k-1}, u_k) + \tau\beta\left(\frac{\partial\varsigma_{k-1}}{\partial x}, u_k\right) - \tau\nu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}, u_k\right) + \\ + \tau(J(\widetilde{\psi}_{k-1}, u_k), u_k) + \tau(J(\varsigma_{k-1}, W_k), u_k) = \tau(R_k, u_k)\,.\end{gathered} \tag{1.28}$$

ცხადია (1.15) და (1.16)-ის ანალოგიურად მიიღება:

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}, u_k\right) = 0 \quad \text{და} \quad (J(\widetilde{\psi}_{k-1}, u_k), u_k) = 0.$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (1.28)-დან გამომდინარეობს:

$$\|u_k\|^2 \le |(u_{k-1}, u_k)| + \tau\beta\left|\left(\frac{\partial\varsigma_{k-1}}{\partial x}, u_k\right)\right| + \tau|(J(\varsigma_{k-1}, W_k), u_k)| + \tau|(R_k, u_k)|\,. \tag{1.29}$$

აქედან შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\|u_k\|^2 \le \|u_{k-1}\|\|u_k\| + \tau\beta\left\|\frac{\partial\varsigma_{k-1}}{\partial x}\right\|\|u_k\| + \tau|(J(\varsigma_{k-1}, W_k), u_k)| + \tau\|R_k\|\|u_k\|\,. \tag{1.30}$$

ცხადია მართებულია უტოლობა:

$$\begin{gathered}|(J(\varsigma_{k-1}, W_k), u_k)| \le \int_\Omega |J(\zeta_{k-1}, W_k)u_k|dxdy \le \\ \le \int_\Omega\left(\left|\frac{\partial\zeta_{k-1}}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial W_k}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\zeta_{k-1}}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial W_k}{\partial x}\right|\right)|u_k|dxdy \le c_1\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial\zeta_{k-1}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\zeta_{k-1}}{\partial y}\right|\right)|u_k|dxdy,\end{gathered} \tag{1.31}$$

სადაც

$$c_1 = \max\left(\max_{(x,y,t)}\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|,\ \max_{(x,y,t)}\left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|\right), \qquad (x,y,t) \in \overline{Q}_T\,.$$

შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_\Omega \left(\left| \frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial y} \right| \right) |u_k| dxdy \le \left(\left\| \frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial y} \right\| \right) \|u_k\|. \tag{1.32}$$

(1.31)-დან (1.32)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\begin{aligned} \left| (J(\varsigma_{k-1}, W_k), u_k) \right|^2 &\le c_1^2 \left(\left\| \frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial y} \right\| \right)^2 \|u_k\|^2 \\ &\le 2c_1^2 \left(\left\| \frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \zeta_{k-1}}{\partial y} \right\|^2 \right) \|u_k\|^2. \end{aligned} \tag{1.33}$$

ცხადია (1.27)-დან (1.20)-ის ანალოგიურად მიიღება:

$$\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy + \gamma_0 \int_\Omega \zeta_k^2 dxdy \le c_0 \int_\Omega u_k^2 dxdy, \qquad c_0 = const > 0. \tag{1.34}$$

(1.33)-დან (1.34)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\left| (J(\varsigma_{k-1}, W_k), u_k) \right| \le c_2 \|u_k\|^2, \qquad c_2 = const > 0. \tag{1.35}$$

(1.30)-დან (1.34), (1.35) და (1.9)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\|u_k\|^2 \le (1 + \beta c_0 \tau) \|u_{k-1}\| \|u_k\| + c_2 \tau \|u_k\|^2 + c \tau^2 \|u_k\|.$$

აქედან გვაქვს:

$$\|u_k\| \le \alpha_\tau \|u_{k-1}\| + \beta_\tau \tau^2, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.36}$$

სადაც

$$\alpha_\tau = \frac{1 + \beta c_0 \tau}{1 - c_2 \tau}, \qquad \beta_\tau = \frac{c}{1 - c_2 \tau}, \qquad 1 - c_2 \tau > 0.$$

(1.36)-დან გამომდინარეობს:

$$\|u_k\| \le \alpha_\tau^k \|u_0\| + \beta_\tau \tau^2 (\alpha_\tau^{k-1} + \ldots + \alpha_\tau + 1). \tag{1.37}$$

ვთქვათ $\tau \le 1/(2c_2)$, მაშინ მართებულია უტოლობები:

$$\begin{aligned} &\alpha_\tau \le 1 + c_3 \tau, \qquad c_3 = 2(\beta c_0 + c_2), \\ &\beta_\tau (1 + \alpha_\tau + \ldots + \alpha_\tau^{k-1}) = \beta_\tau \frac{\alpha_\tau^k - 1}{\alpha_\tau - 1} \le \\ &\le \beta_\tau \frac{\alpha_\tau^k}{\alpha_\tau - 1} = \frac{c_4}{\tau} \alpha_\tau^k, \qquad c_4 = \frac{c}{\beta c_0 + c_2}. \end{aligned}$$

ამ უტოლობების გათვალისწინებით (1.37)-დან გამომდინარეობს:

$$\|u_k\| \le (1+c_3\tau)^k (\|u_0\| + c_4\tau).$$

აქედან კი ცხადია გამომდინარეობს (1.24) შეფასება. შეფასება (1.25) გამომდინარეობს (1.34)-დან (1.24)-ის გათვალისწინებით.

შენიშვნა 3. მართებულია შეფასება:

$$\|\psi_k - \tilde{\psi}_k\|_2^{(2)} \le c\exp(ct_k)(\|W_0 - \tilde{W}_0\| + c\tau)\,, \tag{1.35}$$

სადაც $\|\cdot\|_2^{(2)}$ არის ნორმა სობოლევის $W_2^2(\Omega)$ სივრცეში.

მართლაც, (2.10)-ის ანალოგიურად მიიღება:

$$\|\psi_k - \tilde{\psi}_k\|_2^{(2)} \le c\|W_k - \tilde{W}_k\|\,.$$

ცხადია აქედან (3.1)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს (1.35).

შენიშვნა 4. (1.35)-დან სობოლევის ჩადგმის თეორემის თანახმად გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$\max_{(x,y)\in\Omega} |\psi_k(x,y) - \tilde{\psi}_k(x,y)| \le c\exp(ct_k)(\|W_0 - \tilde{W}_0\| + c\tau)\,, \qquad k = 1,2,\ldots,n\,. \tag{1.36}$$

1.4 ერთადერთობის თეორემა

თეორემა 3. თუ (1.2)-(1.7), ამოცანის ამონახსნი $(W;\psi) \in C^{1,1}(\overline{Q}_T) \times C^{2,0}(\overline{Q}_T)$, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. დაუშვათ, რომ (1.2)-(1.7) ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი $(W;\psi)$ და $(\tilde{W};\tilde{\psi})$, მაშინ წყვილი $(u;\zeta)$ სადაც $u = W - \tilde{W}$, $\zeta = \psi - \tilde{\psi}$ დააკმაყოფილებს შემდეგ სისტემას:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \nu\frac{\partial u}{\partial x} + J(\psi,u) + J(\zeta,\tilde{W}) = 0, \tag{1.37}$$

$$\Delta\zeta - \gamma\zeta = u. \tag{1.38}$$

(1.37) განტოლების მიღებისათვის ჩვენ გამოვიყენეთ შემდეგი მარტივი ფორმულები:

$$J(\psi, W - \tilde{W}) = J(\psi,W) - J(\psi,\tilde{W}) \;\; ,$$
$$J(\psi - \tilde{\psi}, \tilde{W}) = J(\psi,\tilde{W}) - J(\tilde{\psi},\tilde{W}) \;\; .$$

(1.37) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ u-ზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე , მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial u^2}{\partial t}dxdy + \beta\int_\Omega \frac{\partial \zeta}{\partial x}udxdy - \frac{1}{2}\nu\int_\Omega \frac{\partial u^2}{\partial x}dxdy + \int_\Omega J(\psi,u)udxdy + \int_\Omega J(\zeta,\tilde{W})udxdy = 0. \tag{1.39}$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ცხადია გვაქვს:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u^2}{\partial x}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{\partial u^2}{\partial x}dx=\int_0^1 (u^2(1,y,t)-u^2(0,y,t))dy=0\,. \tag{1.40}$$

(1.16)-ის ანალოგიურად გვაქვს:

$$\int_{\Omega}J(\psi,u)udxdy=0\,. \tag{1.41}$$

(1.39)-დან (1.40) და (1.41)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u^2}{\partial t}dxdy+\beta\int_{\Omega}\frac{\partial\zeta}{\partial x}udxdy+\int_{\Omega}J(\zeta,\widetilde{W})udxdy=0\,.$$

ცხადია აქედან კი გამომდინარეობს უტოლობა:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u^2}{\partial t}dxdy\le\beta\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}u\right|dxdy+\int_{\Omega}\left|J(\zeta,\widetilde{W})u\right|dxdy\,. \tag{1.42}$$

(1.37) განტოლებიდან (1.20)-ის ანალოგიურად მიიღება:

$$\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right)dxdy+\gamma_0\int_{\Omega}\zeta^2dxdy\le c_0\int_{\Omega}u^2dxdy\,,\qquad c_0=const>0\,. \tag{1.43}$$

შევაფასოთ (1.42) უტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი მეორე ინტეგრალი. შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_{\Omega}\left|J(\zeta,\widetilde{W})u\right|dxdy\le c_1\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|\right)|u|dxdy\le$$

$$\le c_1\left[\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2dxdy\right)^{1/2}+\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2dxdy\right)^{1/2}\right]\left(\int_{\Omega}u^2dxdy\right)^{1/2}, \tag{1.44}$$

სადაც

$$c_1=\max\left(\max_{(x,y,t)}\left|\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial x}\right|,\ \max_{(x,y,t)}\left|\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial y}\right|\right),\qquad (x,y,t)\in\overline{Q}_T\,.$$

ცხადია (1.44)-დან მიიღება, რომ

$$\left(\int_{\Omega}\left|J(\zeta,\widetilde{W})u\right|dxdy\right)^2\le 2c_1^2\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right)dxdy\int_{\Omega}u^2dxdy\,.$$

აქედან (1.43)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\int_{\Omega}\left|J(\zeta,\widetilde{W})u\right|dxdy\le c_2\int_{\Omega}u^2dxdy,\qquad c_2=const>0. \tag{1.45}$$

შევაფასოთ (1.42) უტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი პირველი ინტეგრალი. შვარცის უტოლობისა და (1.43) უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x} u\right| dxdy \le \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 dxdy\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2 dxdy\right)^{1/2} \le c_3 \int_\Omega u^2 dxdy. \tag{1.46}$$

(1.42)-დან (1.45) და (1.46)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\frac{dE(t)}{dt} \le cE(t), \qquad c = const > 0, \tag{1.47}$$

სადაც

$$E(t) = \int_\Omega u^2 dxdy.$$

როგორც ცნობილია (1.47)-დან გამომდინარეობს:

$$E(t) \le e^{ct} E(0). \tag{1.48}$$

რადგან პირობის თანახმად $E(0) = 0$, ამიტომ (1.48)-დან გამომდინარეობს:

$$E(t) = \int_\Omega u^2 dxdy \equiv 0.$$

აქედან კი გამომდინარეობს რომ $u(x, y, t) \equiv 0$ ან რაც იგივეა $W(x, y, t) \equiv \widetilde{W}(x, y, t)$. ამ იგივეობის გათვალისწინებით (1.43) უტოლობიდან გამომდინარეობს: $\zeta(x, y, t) \equiv 0$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

1.5 მეორე რიგის სიზუსტის ნახევრად დისკრეტული სქემა

განვიხილოთ შემდეგი სახის ნახევრადდისკრეტული სქემა:

$$\frac{\widetilde{W}_{k+1} - \widetilde{W}_{k-1}}{2\tau} + \beta \frac{\partial \widetilde{\psi}_k}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial \widetilde{W}_{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{W}_{k-1}}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} J(\widetilde{\psi}_k, (\widetilde{W}_{k+1} + \widetilde{W}_{k-1})) = 0, \tag{1.49}$$

$$\Delta \widetilde{\psi}_k - \gamma \widetilde{\psi}_k = \widetilde{W}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.50}$$

სადაც $\widetilde{W}_k(x, y)$ და $\widetilde{\psi}_k(x, y)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1.5)-(1.7) პერიოდულ სასაზღვრო პირობებს; $\widetilde{\psi}_0(x, y)$ მოცემული ფუნქციაა.

(1.49), (1.50) სქემასთან დაკავშირებით მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ერთი შენიშვნის გაკეთება.

შენიშვნა 5. ბუნებრივია იბადება კითხვა: რა უპირატესობა აქვს (1.49), (1.50) სქემას (1.10), (1.11) სქემასთან შედარებით. ძირითადი უპირატესობა არის ის, რომ ამონახსნთა გლუვ კლასში (1.49), (1.50) სქემის აპროქსიმაციის რიგი არის $O(\tau^2)$, მაშინ, როცა (1.10), (1.11) სქემის აპროქსიმაციის რიგი არის $O(\tau)$. მეორის მხრივ (1.10), (1.11) სქემას (1.49), (1.50) სქემასთან

შედარებით ის უპირატესობა აქვს, რომ იგი არის ორშრიანი და თვლის დასაწყებად საჭიროებს ერთ სასტარტოო ვექტორს $\widetilde{W}_0(x,y)$ მაშინ, როცა (1.49), (1.50) სქემა კი საჭიროებს ორ სასტარტო ვექტორს $\widetilde{W}_0(x,y)$ და $\widetilde{W}_1(x,y)$. საწყისი ვექტორი $\widetilde{W}_0(x,y)$ ცხადია მოცემულია ($\widetilde{W}_0(x,y)=W_0(x,y)$), ხოლო $\widetilde{W}_1(x,y)$-ის გასაგებად საჭიროა $W(x,y,\tau)$ ფუნქციის τ-ს მიმართ ტეილორის მწკრივად გაშლაში შევინარჩუნოთ მეორე წევრის ჩათვლით. პირველი წევრი $W(x,y,0)$, როგორც ავღნიშნეთ, ცნობილია, ხოლო მეორე წევრს (τ მამრავლის გარეშე) $W_t'(x,y,0)$-ს ვგებულობთ განტოლებიდან $W(x,y,0)$ და $\psi(x,y,0)$ ფუნქციების საშუალებით.

თეორემა 4. მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\| \le \exp(ct_k)\left(\left\|\widetilde{W}_1\right\| + \left\|\widetilde{W}_0\right\|\right), \tag{1.51}$$

$$\left\|\widetilde{\psi}_{k+1}\right\|_2^{(1)} \le c\exp(ct_k)\left\|\widetilde{W}_1+\widetilde{W}_0\right\|, \qquad c=const>0, \quad k=1,2,\dots,n-1, \tag{1.52}$$

სადაც $\|\cdot\|_2^{(1)}$ არის ნორმა სობოლევის $W_2^1(\Omega)$ სივრცეში, ხოლო $\|\cdot\|$-$L_2(\Omega)$-ში.

დამტკიცება. (1.49) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\widetilde{W}_{k+1}+\widetilde{W}_{k-1}$-ზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე, მივიღებთ:

$$\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\|^2 - \left\|\widetilde{W}_{k-1}\right\|^2 + \tau\beta\left(\frac{\partial\widetilde{\psi}_k}{\partial x}, \widetilde{W}_{k+1}+\widetilde{W}_{k-1}\right) - \frac{1}{2}\tau\nu\left(\frac{\partial(\widetilde{W}_{k+1}+\widetilde{W}_{k-1})}{\partial x}, \widetilde{W}_{k+1}+\widetilde{W}_{k-1}\right) + \\ + \frac{1}{2}\tau(J(\widetilde{\psi}_k, \widetilde{W}_{k+1}+\widetilde{W}_{k-1}), \widetilde{W}_{k+1}+\widetilde{W}_{k-1}) = 0\,. \tag{1.53}$$

(1.15)-ის და (1.16)-ის ანალოგიურად ნულის ტოლია (1.53) ტოლობის მარცხენა მხარეში შემავალი მეოთხე და მეხუთე შესაკრებები. ამის გათვალისწინებით ცხადია (1.53)-დან გამომდინარეობს:

$$\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\|^2 \le \left\|\widetilde{W}_{k-1}\right\|^2 + \tau\beta\left|\left(\frac{\partial\widetilde{\psi}_k}{\partial x}, \widetilde{W}_{k+1}+\widetilde{W}_{k-1}\right)\right|.$$

აქედან შვარცის უტოლობისა და (1.20) უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\|^2 \le \left\|\widetilde{W}_{k-1}\right\|^2 + \tau\beta\left\|\frac{\partial\widetilde{\psi}_k}{\partial x}\right\|\left\|\widetilde{W}_{k+1}+\widetilde{W}_{k-1}\right\| \le \left\|\widetilde{W}_{k-1}\right\|^2 + \tau\beta\left\|\widetilde{W}_k\right\|\left(\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\| + \left\|\widetilde{W}_{k-1}\right\|\right) \le \\ \le (1+c\tau)\left\|\widetilde{W}_{k-1}\right\|^2 + c\tau\left(\left\|\widetilde{W}_k\right\|^2 + \left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\|^2\right), \qquad c=\frac{\beta}{2}\,.$$

ცხადია აქედან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\|^2 \le \alpha_\tau\left\|\widetilde{W}_{k-1}\right\|^2 + \tau\beta_\tau\left\|\widetilde{W}_k\right\|^2, \tag{1.54}$$

სადაც

$$\alpha_\tau = \frac{1+c\tau}{1-c\tau}, \qquad \beta_\tau = \frac{c}{1-c\tau}, \qquad 1-c\tau>0\,.$$

თუ (1.54) უტოლობის ორივე მხარეს დაუმატებთ $\left\|\widetilde{W}_k\right\|^2$ და გავითვალისწინებთ, რომ $1+\tau\beta_\tau<\alpha_\tau$, მაშინ მივიღებთ:

$$\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\|^2+\left\|\widetilde{W}_k\right\|^2 \le \alpha_\tau\left(\left\|\widetilde{W}_k\right\|^2+\left\|\widetilde{W}_{k-1}\right\|^2\right).$$

აქედან გამომდინარეობს:

$$\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\|^2+\left\|\widetilde{W}_k\right\|^2 \le \alpha_\tau^k\left(\left\|\widetilde{W}_1\right\|^2+\left\|\widetilde{W}_0\right\|^2\right). \qquad (1.55)$$

თუ $\tau \le 1/(2c)$, მაშინ (1.55)-დან გამომდინარეობს:

$$\left\|\widetilde{W}_{k+1}\right\|^2+\left\|\widetilde{W}_k\right\|^2 \le \exp(c_1 t_k)\left(\left\|\widetilde{W}_1\right\|^2+\left\|\widetilde{W}_0\right\|^2\right), \qquad c_1 = 4c .$$

ცხადია აქედან გამომდინარეობს (1.51) შეფასება. შეფასება (1.52) გამომდინარეობს (1.20)-დან (1.51)-ის გათვალისწინებით.

მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 5. თუ (1.2)-(1.7) ამოცანის ამონახსნი $(W;\psi)$ საკმარისად გლუვია, მაშინ (1.49), (1.50) ნახევრადდისკრეტული სქემისთვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|W_{k+1}-\widetilde{W}_{k+1}\right\| \le \exp(ct_k)\left(\left\|W_1-\widetilde{W}_1\right\|+\left\|W_0-\widetilde{W}_0\right\|+c\tau^2\right), \qquad (1.56)$$

$$\left\|\psi_{k+1}-\widetilde{\psi}_{k+1}\right\|_2^{(1)} \le c\exp(ct_k)\left(\left\|W_1-\widetilde{W}_1\right\|+\left\|W_0-\widetilde{W}_0\right\|+c\tau^2\right), \quad c = const>0, \quad k=1,2,\dots,n-1, \qquad (1.57)$$

სადაც $\left\|\cdot\right\|_2^{(1)}$ არის ნორმა სობოლევის $W_2^1(\Omega)$ სივრცეში, ხოლო $\left\|\cdot\right\|$-$L_2(\Omega)$-ში.

დამტკიცება. ვამტკიცებთ თეორემა 2-ის ანალოგიურად, თუმცა დამტკიცების ბოლო ეტაპი განსხვავებულია და საჭიროებს გაშლილად ჩამოყალიბებას.

ცხადია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება $(u_k;\varsigma_k)=(W_k-\widetilde{W}_k;\psi_k-\widetilde{\psi}_k)$ აკმაყოფილებს შემდეგ სისტემას:

$$\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2\tau}+\beta\frac{\partial\varsigma_k}{\partial x}-\frac{1}{2}\nu\frac{\partial(u_{k+1}+u_{k-1})}{\partial x}+\frac{1}{2}J(\widetilde{\psi}_{k-1},u_{k+1}+u_{k-1})+\frac{1}{2}J(\varsigma_k,W_{k+1}+W_{k-1})=R_k(x,y), \qquad (1.58)$$

$$\Delta\varsigma_k-\gamma\varsigma_k=u_k , \qquad (1.59)$$

სადაც $R_k(x,y)$ ნაშთითი წევრისთვის, ამონახსნთა გლუვ კლასში, მართებულია შეფასება:

$$\max_{(x,y)\in\Omega}\left|R_k(x,y)\right| \le c\tau^2, \quad c=const>0 . \qquad (1.60)$$

(1.58) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $u_{k+1}+u_{k-1}$-ზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე, მივიღებთ:

$$\begin{gathered}\left\|u_{k+1}\right\|^2-\left\|u_{k-1}\right\|^2+4\tau\beta\left(\frac{\partial\varsigma_k}{\partial x},\hat{u}_k\right)-4\tau\nu\left(\frac{\partial\hat{u}_k}{\partial x},\hat{u}_k\right)+\\ +4\tau(J(\widetilde{\psi}_{k-1},\hat{u}_k),\hat{u}_k)+4\tau(J(\varsigma_k,\hat{W}_k),\hat{u}_k)=4\tau(R_k,\hat{u}_k),\end{gathered} \qquad (1.61)$$

სადაც

$$\hat{u}_k=\frac{u_{k+1}+u_{k-1}}{2}, \quad \hat{W}_k=\frac{W_{k+1}+W_{k-1}}{2}.$$

(1.15)-ის და (1.16)-ის ანალოგიურად ნულის ტოლია (5.13) ტოლობის მარცხენა მხარეში შემავალი მეოთხე და მეხუთე შესაკრებები. ამის გათვალისწინებით ცხადია (1.61)-დან გამომდინარეობს:

$$\|u_{k+1}\|^2 \le \|u_{k-1}\|^2 + 4\tau\beta\left|\left(\frac{\partial\varsigma_k}{\partial x}, \hat{u}_k\right)\right| + 4\tau\left|(J(\varsigma_k, \hat{W}_k), \hat{u}_k)\right| + 4\tau\left|(R_k, \hat{u}_k)\right|. \tag{1.62}$$

აქედან შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\|u_{k+1}\|^2 \le \|u_{k-1}\|^2 + 4\tau\beta\left\|\frac{\partial\varsigma_k}{\partial x}\right\|\|\hat{u}_k\| + 4\tau\left|(J(\varsigma_k, \hat{W}_k), \hat{u}_k)\right| + 4\tau\|R_k\|\|\hat{u}_k\|. \tag{1.63}$$

ცხადია მართებულია უტოლობა:

$$\left|(J(\varsigma_k, \hat{W}_k), \hat{u}_k)\right| \le \int_\Omega \left|J(\zeta_k, \hat{W}_k)\hat{u}_k\right| dxdy \le$$

$$\le \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\hat{W}_k}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\zeta_k}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial\hat{W}_k}{\partial x}\right|\right)|\hat{u}_k| dxdy \le c_1 \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\zeta_k}{\partial y}\right|\right)|\hat{u}_k| dxdy, \tag{1.64}$$

სადაც

$$c_1 = \max\left(\max_{(x,y,t)}\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|, \ \max_{(x,y,t)}\left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|\right), \qquad (x,y,t) \in \overline{Q}_T .$$

შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\zeta_k}{\partial y}\right|\right)|\hat{u}_k| dxdy \le \left(\left\|\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial\zeta_k}{\partial y}\right\|\right)\|\hat{u}_k\|. \tag{1.65}$$

(1.64)-დან (1.65)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\left|(J(\varsigma_k, \hat{W}_k), \hat{u}_k)\right|^2 \le c_1^2\left(\left\|\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial\zeta_k}{\partial y}\right\|\right)^2 \|\hat{u}_k\|^2 \le 2c_1^2\left(\left\|\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\zeta_k}{\partial y}\right\|^2\right)\|\hat{u}_k\|^2 . \tag{1.66}$$

(1.66)-დან (1.34)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\left|(J(\varsigma_k, \hat{W}_k), \hat{u}_k)\right| \le c_2 \|u_k\|\|\hat{u}_k\|, \qquad c_2 = const > 0 . \tag{1.67}$$

(1.63)-დან (1.34), (1.67) და (1.60)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\begin{aligned}
&\|u_{k+1}\|^2 \le \|u_{k-1}\|^2 + 4\tau\|\hat{u}_k\|\left((\beta c_0 + c_2)\|u_k\| + c\tau^2\right) \le \\
&\le \|u_{k-1}\|^2 + 2\tau\left(\|u_{k+1}\| + \|u_{k-1}\|\right)\left((\beta c_0 + c_2)\|u_k\| + c\tau^2\right) = \\
&= \|u_{k-1}\|^2 + 2\tau\left((\beta c_0 + c_2)\|u_{k+1}\|\|u_k\| + (\beta c_0 + c_2)\|u_{k-1}\|\|u_k\| + c\tau^2\left(\|u_{k+1}\| + \|u_{k-1}\|\right)\right).
\end{aligned}$$

ცხადია აქედან მიიღება:

$$\begin{aligned}
&\|u_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2 \le (1 + c_3\tau)\left(\|u_k\|^2 + \|u_{k-1}\|^2\right) + c_3\tau\left(\|u_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2\right) + \\
&+ c\tau^3\left(\left(\|u_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2\right)^{1/2} + \left(\|u_k\|^2 + \|u_{k-1}\|^2\right)^{1/2}\right), \qquad c_3 = \beta c_0 + c_2 .
\end{aligned} \tag{1.68}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\lambda_k = \left(\|u_k\|^2 + \|u_{k-1}\|^2\right)^{1/2}.$$

მაშინ (1.68) მიიღებს სახეს

$$\lambda_{k+1}^2 \le \alpha_\tau \lambda_k^2 + \beta_\tau \tau^3 (\lambda_k + \lambda_{k+1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{1.69}$$

სადაც

$$\alpha_\tau = \frac{1 + c_3\tau}{1 - c_3\tau}, \qquad \beta_\tau = \frac{c}{1 - c_3\tau}, \qquad 1 - c_3\tau > 0.$$

(1.69)-დან გამომდინარეობს:

$$\lambda_{k+1}^2 \le \alpha_\tau^k \lambda_1^2 + \beta_\tau \tau^3 (\alpha_\tau^{k-1}(\lambda_1 + \lambda_2) + \ldots + \alpha_\tau(\lambda_{k-1} + \lambda_k) + (\lambda_k + \lambda_{k+1})). \tag{1.70}$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$\lambda_{k+1} \le \alpha_\tau^k \lambda_1 + 2\beta_\tau \tau^3 (\alpha_\tau^{k-1} + \ldots + \alpha_\tau + 1). \tag{1.71}$$

მართლაც, ვთქვათ

$$\lambda_{j+1} = \max_{1 \le i \le k} \lambda_{i+1}.$$

მაშინ (1.70)-დან გვაქვს:

$$\lambda_{j+1} \le \alpha_\tau^j \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{j+1}}\right)\lambda_1 + \beta_\tau \tau^3 \left(\alpha_\tau^{j-1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{j+1}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_{j+1}}\right) + \ldots + \alpha_\tau \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_{j+1}} + \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}\right) + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}} + \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1}}\right)\right) \le$$
$$\le \alpha_\tau^j \lambda_1 + 2\beta_\tau \tau^3 (\alpha_\tau^{j-1} + \ldots + \alpha_\tau + 1).$$

აქედან კი ცხადია გამომდინარეობს (1.71).

ვთქვათ $\tau \le 1/(2c_3)$, მაშინ მართებულია უტოლობები:

$$\alpha_\tau \le 1 + c_4\tau, \qquad c_4 = 4c_3,$$
$$2\beta_\tau (1 + \alpha_\tau + \ldots + \alpha_\tau^{k-1}) = 2\beta_\tau \frac{\alpha_\tau^k - 1}{\alpha_\tau - 1} \le$$
$$\le 2\beta_\tau \frac{\alpha_\tau^k}{\alpha_\tau - 1} = \frac{c_5}{\tau}\alpha_\tau^k, \qquad c_5 = \frac{c}{c_3}.$$

ამ უტოლობების გათვალისწინებით (1.71)-დან გამომდინარეობს:

$$\lambda_{k+1} \le (1 + c_4\tau)^k (\lambda_1 + c_5\tau^2).$$

აქედან კი ცხადია გამომდინარეობს (1.56) შეფასება. შეფასება (1.57) გამომდინარეობს (1.34)-დან (1.56)-ის გათვალისწინებით.

შენიშვნა 6. მართებულია შეფასებები:

$$\|\psi_{k+1} - \tilde{\psi}_{k+1}\|_2^{(2)} \le c\exp(ct_k)\left(\|W_1 - \tilde{W}_1\| + \|W_0 - \tilde{W}_0\| + c\tau^2\right), \tag{1.72}$$

$$\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |\psi_{k+1}(x,y) - \tilde{\psi}_{k+1}(x,y)| \le c\exp(ct_k)(\|W_1 - \tilde{W}_1\| + \|W_0 - \tilde{W}_0\| + c\tau^2), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{1.73}$$

სადაც $\|\cdot\|_2^{(2)}$ არის ნორმა სობოლევის $W_2^2(\Omega)$ სივრცეში, ხოლო $\|\cdot\|$-$L_2(\Omega)$-ში.

(1.72) და (1.73) შეფასებები მიიღება (1.35) და (1.36) შეფასებების ანალოგიურად.

თავი 2. პარაბოლური რეგულაცია ჩარნი-ობუხოვის განტოლებისათვის

2.1 ამოცანის დასმა

უგანზომილებო ცვლადებში ჩარნი-ობუხოვის არაწრფივი განტოლება X ღერძის გასწვრივ ν სიჩქარით მოძრავ კორდინატთა სისტემაში ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial(\Delta\psi-\gamma\psi)}{\partial t}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}-\nu\frac{\partial(\Delta\psi-\gamma\psi)}{\partial x}+J(\psi,\Delta\psi)=0, \qquad (2.1)$$

სადაც β და γ დადებითი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან გარემოს ფიზიკური მახასიათებლების საშუალებით. $\psi(x,y,t)$-უწოდებენ დენის ფუნქციას. $J(\psi,\Delta\psi)$ არის იაკობიანი

$$J(\psi,\Delta\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x}.$$

(2.1) განტოლების ნაცვლად ჩვენ ვიხილავთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}-\tau\Delta W+\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial W}{\partial y}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial W}{\partial x}-\nu\dfrac{\partial W}{\partial x}=0 & (2.2)\\ \Delta\psi-\gamma\psi=W-\beta y & (2.3)\end{cases}$$

სადაც $\tau>0$ არის მცირე პარამეტრი.

შევნიშნოთ რომ $\tau\Delta W$ წევრის გარეშე (2.2),(2.3) სისტემა ექვივალენტურია (2.1) განტოლების. აქედან გამომდინარე, შეიძლება ითქვას (2.2),(2.3) სისტემა წარმოადგენს (2.1) განტოლების აპროქსიმაციას (ცხადია აპროქსიმაციის რიგი არის $O(\tau)$).

(2.2),(2.3) სისტემას ვხსნით $(x,y,t)\in Q_T=\Omega\times\left]0;T\right[$ ცილინდრულ არეში სადაც Ω არის მართკუთხედი $\Omega=]-a_1;a_1[\times]-a_2;a_2[$. საწყის პირობად $t=0$ მომენტში ვიღებთ განმხოლოებულ ტალღას: $\psi(x,y,0)=\psi_0(x,y)$. რაც შეეხება სასაზღვრო პირობებს, იგი აღებული იქნება სხვაობიან სისტემაზე გადასვლის შემდეგ.

2.2 დროითი ბიჯის მიმართ პირველი რიგის სიზუსტის არაცხადი სქემა

ავიღოთ დროითი ბიჯი $\tau=T/n$ ($n>1$ ნატურალური რიცხვია) და მოვახდინოთ (2.2) განტოლების აპროქსიმაცია $(x,y.t_k)$ წერტილში, სადაც $t_k=k\tau$ $(k=1,2,...,n)$ შემდეგი ნახევრად დისკრეტული სქემით:

$$\frac{W^k-W^{k-1}}{t}+\frac{\partial\psi^{k-1}}{\partial x}\frac{\partial W^k}{\partial y}-\frac{\partial\psi^{k-1}}{\partial y}\frac{\partial W^k}{\partial x}-\nu\frac{\partial W^k}{\partial x}-\tau\Delta W^k=0. \qquad (2.4)$$

ცხადია (2.4) სხვაობიანი განტოლება ახდენს (2.2) განტოლების აპროქსიმაციას $(x, y.t_k)$ წერტილში $\mathrm{O}(\tau)$ რიგის სიზუსტით.

დავფაროთ Ω არე ბადით. დაყოფათა რიცხვი x-ით და y-ით ავღნიშნოთ შესაბამისად N_1-ით და N_2-ით, ხოლო ბიჯები – h_1-ით და h_2-ით, $h_1 = \dfrac{2a_1}{\mathrm{N}_1}$, $h_2 = \dfrac{2a_2}{\mathrm{N}_2}$.

თუ (2.4) განტოლებაში პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებს სივრცული ცვლადების მიმართ შევცვლით ცენტრალური სხვაობებით მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან განტოლებას:

$$\frac{W^k_{i,j}-W^{k-1}_{i,j}}{\tau}+\frac{\psi^{k-1}_{i+1,j}-\psi^{k-1}_{i-1,j}}{2h_1}\frac{W^k_{i,j+1}-W^k_{i,j-1}}{2h_2}-\frac{\psi^{k-1}_{i,j+1}-\psi^{k-1}_{i,j-1}}{2h_2}\frac{W^k_{i+1,j}-W^k_{i-1,j}}{2h_1}-\nu\frac{W^k_{i+1,j}-W^k_{i-1,j}}{2h_1}-$$

$$-\tau\Big(\frac{W^k_{i+1,j}-2W^k_{i,j}+W^k_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{W^k_{i,j+1}-2W^k_{i,j}+W^k_{i,j-1}}{h_2^2}\Big)=0\ , \qquad (2.5)$$

სადაც $i=1,\dots,\mathrm{N}_1-1$, $j=1,\dots,\mathrm{N}_2-1$, $x_i=-a_1+ih_1$, $y_j=-a_2+jh_2$, $t_k=k\tau$

ცხადია (2.5) სხვაობიანი განტოლება ახდენს (2.4) განტოლების აპროქსიმაციას $\mathrm{O}(\tau+h_1^2+h_2^2)$ სიზუსტით $(x_i, y_j.t_k)$ წერტილში.

დენის ფუნქციის ველის აღდგენა ხდება გრიგალის ველის მიხედვით (2.3) განტოლების შესაბამისი შემდეგი სტანდარტული სხვაობიანი განტოლებიდან:

$$\frac{\psi^k_{i+1,j}-2\psi^k_{i,j}+\psi^k_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{\psi^k_{i,j+1}-2\psi^k_{i,j}+\psi^k_{i,j-1}}{h_2^2}-\gamma\psi^k_{i,j}=W^k_{i,j}-\beta y_j, \qquad (2.6)$$

$$i=1,\dots,\mathrm{N}_1-1\ ,\quad j=1,\dots,\mathrm{N}_2-1.$$

(2.5) და (2.6) სხვაობიანი განტოლებათა სისტემისათვის ვიღებთ შემდეგ საწყის და სასაზღვრო პირობებს:

$$W^0_{i,j}=\Delta\psi_0(x_i,y_j)-\gamma\psi_0(x_i,y_j)+\beta y_j, \qquad (2.7)$$

$$W^k_{0,j}=W^0_{0,j}\ ,\quad W^k_{\mathrm{N}_1,j}=W^0_{\mathrm{N}_1,j}\ ,\qquad W^k_{i,0}=W^0_{i,0}\ ,\quad W^k_{i,\mathrm{N}_2}=W^0_{i,\mathrm{N}_2}, \qquad (2.8)$$

$$\psi^k_{0,j}=\psi^0_{0,j}\ ,\quad \psi^k_{\mathrm{N}_1,j}=\psi^0_{\mathrm{N}_1,j},\qquad \psi^k_{i,0}=\psi^0_{i,0}\ ,\quad \psi^k_{i,\mathrm{N}_2}=\psi^0_{i,\mathrm{N}_2} \qquad (2.9)$$

$$\psi^0_{i,j}=\psi_0(x_i,y_j) \qquad (2.10)$$

ამრიგად (2.5)-(2.10) წარმოადგენს სრულ სისტემას. ბუნებრივია ბადური ფუნქციების მნიშვნელობები $W^k_{i,j}$ და $\psi^k_{i,j}$ გამოვაცხადოდ შესაბამისად $W(x,y,t)$ და $\psi(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნების მიახლოებით მნიშვნელობად $(x_i, y_j.t_k)$ წერტილში.

(2.5) სხვაობიან განტოლებათა სისტემას ვხსნით შემდეგი იტერაციული პროცესის გამოყენებით:

$$-\alpha_1^2\gamma\overset{m}{W^k}{}_{i+1,j}+(2\alpha_1^2\gamma+2\alpha_2^2\gamma+1)\overset{m}{W^k}{}_{i,j}-\alpha_1^2\gamma\overset{m}{W^k}{}_{i-1,j}=\gamma\,\alpha_2^2(\overset{m-1}{W^k}{}_{i,j+1}-\overset{m-1}{W^k}{}_{i,j-1})-$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_1(\delta_y\psi^{k-1}_{i,j}+\nu)(\overset{m-1}{W^k}{}_{i+1,j}-\overset{m-1}{W^k}{}_{i-1,j})-\frac{1}{2}\alpha_2\delta_x\psi^{k-1}_{i,j}(\overset{m-1}{W^k}{}_{i,j+1}-\overset{m-1}{W^k}{}_{i,j-1})+W^{k-1}_{i,j}, \qquad (2.11)$$

სადაც m არის იტერაციის ნომერი $(m = 1,2,\ldots)$

$$\alpha_1 = \frac{\tau}{h_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\tau}{h_2}, \qquad \delta_x \psi_{i,j}^{k-1} = \frac{\psi_{i+1,j}^{k-1} - \psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1}, \qquad \delta_y \psi_{i,j}^{k-1} = \frac{\psi_{i,j+1}^{k-1} - \psi_{i,j-1}^{k-1}}{2h_2}.$$

(2.11) განტოლებათა სისტემას ფიქსირებული k და j-სათვის ვხსნით ფაქტორიზაციის მეთოდით. თავიდან მარჯვენა მხარეში ვსვამთ $\overset{0}{W}{}^k$-ს და ვპოულობთ $\overset{1}{W}{}^k$-ს, შემდეგ იტერაციაზე მარჯვენა მხარეში ვსვამთ $\overset{1}{W}{}^k$ და ვპოულობთ $\overset{2}{W}{}^k$-ს. პროცესს ვაგრძელებთ მანამდე, ვიდრე ორ მომდევნო იტერაციას შორის სხვაობის მოდული ყველა კვანძით წერტილში არ იქნება წინასწარ დასახელებულ $\varepsilon > 0$-ზე ნაკლები.

ანალოგიურად ვხსნით (2.6) განტოლებათა სისტემას, შემდეგი იტერაციის გამოყენებით:

$$-\overset{m}{\psi}{}^k_{i+1,j} + a\overset{m}{\psi}{}^k_{i,j} - \overset{m}{\psi}{}^k_{i-1,j} = \alpha_0^2 (\overset{m-1}{\psi}{}^k_{i,j+1} + \overset{m}{\psi}{}^k_{i,j-1}) - h_1^2 (W_{i,j}^k - \beta y_j), \tag{2.12}$$

სადაც m არის იტერაციის ნომერი $(m = 1,2,\ldots)$, $\alpha_0 = \dfrac{h_1}{h_2}$, $a = 2 + 2a_0^2 + \gamma h_1^2$

გამოვიკვლიოთ (2.11) იტერაციული პროცესის კრებადობა. ზუსტ ამონახსნსა და m-ურ იტერაციას შორის სხვაობა ავღნიშნოთ $\overset{m}{Z}_{i,j}$, $\overset{m}{Z}_{i,j} = W_{i,j}^k - \overset{m}{W}{}^k_{i,j}$.

ცხადია $\overset{m}{Z}_{i,j}$ აკმაყოფილებს შემდეგ სისტემას:

$$-\alpha_1^2\gamma \overset{m}{Z}_{i+1,j} + (2\alpha_1^2\gamma + 2\alpha_2^2\gamma + 1)\overset{m}{Z}_{i,j} - \alpha_1^2\gamma \overset{m}{Z}_{i-1,j} = \gamma\,\alpha_2^2 (\overset{m-1}{Z}_{i,j+1} + Z_{i,j-1}) +$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_1 (\delta_y \psi_{i,j}^{k-1} + \nu)(\overset{m}{Z}_{i+1,j} - \overset{m}{Z}_{i-1,j}) - \frac{1}{2}\alpha_2 \delta_x \psi_{i,j}^{k-1} (\overset{m}{Z}_{i,j+1} - \overset{m}{Z}_{i,j-1}).$$

აქედან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$(2\alpha_1^2\gamma + 2\alpha_2^2\gamma + 1)\left|\overset{m}{Z}_{i,j}\right| \le 2\alpha_1^2\gamma\mu_m + 2\alpha_2^2\gamma\mu_{m-1} + \alpha_1 \left|\delta_y \psi_{i,j}^{k-1} + \nu\right| \mu_{m-1} + \alpha_2 \left|\delta_x \psi_{i,j}^{k-1}\right| \mu_{m-1} \tag{2.13}$$

სადაც $\mu_m = \max\limits_{s,l} \left|\overset{m}{Z}_{s,l}\right| \qquad s = 0,1,\ldots,N_1 \qquad l = 0,1,\ldots,N_2$

რადგან ბადური ფუნქცია $\overset{m}{Z}_{s,l}$ საზღვარზე ნულის ტოლია, ამიტომ (2.13)-დან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$(2\alpha_1^2\gamma + 2\alpha_2^2\gamma + 1)\,\mu_m \le 2\alpha_1^2\gamma\mu_m + 2\alpha_2^2\gamma\mu_{m-1} + \alpha_1 \left|\delta_y \psi_{i,j}^{k-1} + \nu\right| \mu_{m-1} + \alpha_2 \left|\delta_x \psi_{i,j}^{k-1}\right| \mu_{m-1},$$

ან რაც იგივეა

$$\mu_m \le q\mu_{m-1}, \tag{2.14}$$

სადაც

$$q = \frac{2\alpha_2^2\gamma}{1 + 2\alpha_2^2\gamma} + \frac{1}{1 + 2\alpha_2^2\gamma}\left(\alpha_1 \left|\delta_y \psi_{i,j}^{k-1} + \nu\right| + \alpha_2 \left|\delta_x \psi_{i,j}^{k-1}\right|\right).$$

(2.14)-დან გამომდინარეობს, რომ იტერაციული პროცესი (2.8) კრებადია თუ შესრულებულია პირობა:

$$\alpha_1 \max_{i,j}\left|\delta_y \psi_{i,j}^{k-1} + v\right| + \alpha_2 \max_{i,j}\left|\delta_x \psi_{i,j}^{k-1}\right| < 1. \qquad (2.15)$$

წინა შრიდან მომდევნო შრეზე გადასვლის ბიჯი τ შეირჩევა (2.15) პირობიდან, რომელიც წარმოადგენს (2.11) იტერაციული პროცესის კრებადობის საკმარის პირობას.

შენიშვნა. (2.11) და (2.12) იტერაციებში W^k და ψ^k ფუნქციების საწყის მიახლოებად ვიღებთ შესაბამისი ფუნქციების მნიშვნელობებს წინა $k-1$ შრეზე, რაც მნიშვნელოვნად აჩქარებს იტერაციული პროცესის კრებადობას.

2.3 ამონახსნის ერთადერთობა

სიმარტივისათვის Ω არე ავიღოთ ერთეულოვანი კვადრატი, $\Omega =]0;1[\times]0;1[$. (2.3) სისტემისათვის ვიხილავთ შემდეგ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას:

$$W(x,y,0) = W_0(x,y)\,, \qquad (2.16)$$

$$W(x,y,t)\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad \psi(x,y,t)\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad \forall t \in [0;T]\ . \qquad (2.17)$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა. თუ (2.2), (2.3), (2.16), (2.17) ამოცანის ამონახსნი $(W,\psi) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T) \times C^{3,0}(\overline{Q}_T)$, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. დავუშვათ (2.2), (2.3), (2.16), (2.17) ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი (W,ψ) და $(\tilde{W},\tilde{\psi})$, მაშინ ვექტორი (u,ζ) სადაც $u = W - \tilde{W}$ და $\zeta = \psi - \tilde{\psi}$ დააკმაყოფილებს შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \tau\,\Delta u + J(\psi,u) + J(\zeta,\tilde{W}) - \nu\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & (2.18) \\ \Delta\zeta - \gamma\zeta = u. & (2.19) \end{cases}$$

(2.18) განტოლების მიღებისთვის ჩვენ გამოვიყენეთ შემდეგი მარტივი ფორმულები:

$$J(\psi, W - \tilde{W}) = J(\psi,W) - J(\psi,\tilde{W})\ ,$$
$$J(\psi - \tilde{\psi}, \tilde{W}) = J(\psi,\tilde{W}) - J(\tilde{\psi},\tilde{W})\ .$$

(2.18) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ u-ზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial u^2}{\partial t}\,dxdy - \tau\int_\Omega \Delta u\, u\, dxdy + \int_\Omega J(\psi,u)\,u\,dxdy + \int_\Omega J(\zeta,\tilde{W})\,u\,dxdy - \frac{1}{2}\nu\int_\Omega \frac{\partial u^2}{\partial x}\,dxdy = 0. \qquad (2.20)$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, ცხადია გვაქვს:

$$\int_\Omega \frac{\partial u^2}{\partial x}\,dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial u^2}{\partial x}\,dx = \int_0^1 (u^2(1,y,t) - u^2(0,y,t))\,dy = 0 \qquad (2.21)$$

ვაჩვენოთ, რომ მართებულია ტოლობა:

$$\int_\Omega J(\psi,u)\,u\,dxdy=0 \tag{2.22}$$

მართლაც გვაქვს:

$$\int_\Omega J(\psi,u)udxdy=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u^2}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dy-\frac{1}{2}\int_0^1 dy\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(u^2(x,1,t)\frac{\partial\psi(x,1,t)}{\partial x}-u^2(x,0,t)\frac{\partial\psi(x,0,t)}{\partial x}\right)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(u^2(1,y,t)\frac{\partial\psi(1,y,t)}{\partial y}-u^2(0,y,t)\frac{\partial\psi(0,y,t)}{\partial y}\right)dy\ =0.$$

(2.20)-დან (2.21) და (2.22)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს რომ:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial u^2}{\partial t}dxdy-\tau\int_\Omega\Delta u\,u\,dxdy+\int_\Omega J(\psi,u)\,u\,dxdy+\int_\Omega J(\zeta,\widetilde{W})\,u\,dxdy=0. \tag{2.23}$$

ცხადია გვაქვს:

$$-\int_\Omega\Delta u\,u\,dxdy=-\int_0^1 dy\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}udx-\int_0^1 dx\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}udy=\int_0^1 dy\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx+\int_0^1 dx\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy\ge 0. \tag{2.24}$$

(2.23)-დან (2.24)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს რომ:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial u^2}{\partial t}dxdy+\int_\Omega J(\zeta,\widetilde{W})\,u\,dxdy\le 0.$$

ცხადია აქედან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial u^2}{\partial t}dxdy\le\int_\Omega\left|J(\zeta,\widetilde{W})u\right|dxdy\le 0. \tag{2.25}$$

როგორც ცნობილია, თუ (2.19) განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ζ-ზე და ვაინტეგრებთ Ω არეზე, ამასთან გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას და გავითვალისწინებთ რომ ζ ფუნქცია აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\gamma\int_\Omega\zeta^2dx\,dy=-\int_\Omega u\zeta\,dx\,dy\,. \tag{2.26}$$

შვარცის უტოლობისა და ε-უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_\Omega|u\zeta|dxdy\le\left(\int_\Omega u^2dxdy\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\zeta^2dxdy\right)^{1/2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega u^2dxdy+\varepsilon^2\int_\Omega\zeta^2dxdy\right). \tag{2.27}$$

შევარჩიოთ $\varepsilon>0$, ისე რომ შესრულდეს პირობა:

$$\gamma_0=\gamma-\frac{1}{2}\varepsilon^2>0\,,$$

მაშინ (2.26)-დან (2.27)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\gamma_0\int_{\Omega}\zeta^2\,dx\,dy\le c_0\int_{\Omega}u^2dx\,dy\,, \qquad (2.28)$$

სადაც $c_0 = const > 0$.

შევაფასოთ (2.25) უტოლობის მარჯვენა მხარე, ცხადია გვაქვს:

$$\int_{\Omega}\left|J(\zeta,\tilde{W})u\right|dxdy\le\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\tilde{W}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x}\right|\right)|u|dxdy\le c_1\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|\right)|\,u\,|\,dx\,dy\,, \qquad (2.29)$$

$$c_1=\max_{(x,y,t)}\left(\left|\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\tilde{W}}{\partial y}\right|\right),\qquad (x,y,t)\in\overline{Q}_T\,.$$

შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|\right)|u|dxdy\le\left[\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2dxdy\right)^{1/2}+\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2dxdy\right)^{1/2}\right]\left(\int_{\Omega}u^2dxdy\right)^{1/2}. \qquad (2.30)$$

(3.14)-დან (3.15)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ

$$\left(\int_{\Omega}\left|J(\zeta,\tilde{W})u\right|dxdy\right)^2\le 2c_1^2\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2dxdy+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2dxdy\right)\int_{\Omega}u^2dxdy\quad. \qquad (2.31)$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ტრივიალური უტოლობა: $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$.

(2.31)-დან (2.28)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\int_{\Omega}\left|J(\zeta,\tilde{W})u\right|dxdy\le c_2\int_{\Omega}u^2dx\,dy, \qquad (2.32)$$

სადაც $c_2 = const > 0$

(2.25) და (2.32)-დან გამომდინარეობს:

$$\frac{dE(t)}{dt}\le cE(t),\qquad c=const>0. \qquad (2.33)$$

სადაც

$$E(t)=\int_{\Omega}u^2(x,y,t)\,dx\,dy\quad.$$

როგორც ცნობილია (2.33)-დან გამომდინარეობს:

$$E(t)\le e^{ct}E(0)\,. \qquad (2.34)$$

რადგან პირობის თანახმად $E(0)=0$, ამიტომ ცხადია (2.34)-დან მიიღება:

$$E(t)=\int_{\Omega}u^2(x,y,t)\,dx\,dy\equiv 0\,.\qquad t\in[0,\mathrm{T}]$$

აქედან კი გამომდინარეობს რომ $u(x,y,t)\equiv 0$ ან რაც იგივეა $W(x,y,t)\equiv \widetilde{W}(x,y,t)$. ამ იგივეობის გათვალისწინებით (2.28) უტოლობებიდან შესაბამისად გამომდინარეობს: $\zeta(x,y,t)\equiv 0$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თავი 3. წონიანი სხვაობიანი სქემა ჩარნი-ობუხოვის განზოგადებული განტოლებისათვის დისიპაციის გათვალისწინებით

3.1 ამოცანის დასმა

უგანზომილებო ცვლადებში ჩარნი–ობუხოვის არაწრფივი განზოგადებულ განტოლებას დისიპაციის გათვალისწინებით აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{\partial(-a\Delta^2\psi+\Delta\psi-\psi)}{\partial t}-b_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+b_2J(\psi,-a\Delta^2\psi+\Delta\psi)+ \\ +\alpha\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}-b_3\Delta^2\psi+b_4\Delta\psi=0, \tag{3.1}$$

სადაც b_1, b_2, b_3, b_4, a და α დადებითი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან გარემოს ფიზიკური მახასიათებლების საშუალებით. $\psi(x,y,t)$ არის დენის ფუნქცია, $J(\psi,-a\Delta^2\psi+\Delta\psi)$ - იაკობიანი.
შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$-a\Delta^2\psi+\Delta\psi-\psi=W.$$

ცხადია მართებულია წარმოდგენა:

$$-a(\Delta-\gamma_2)(\Delta-\gamma_1)\psi=W, \tag{3.2}$$

სადაც

$$\gamma_1=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}, \qquad \gamma_2=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}.$$

ვგულისხმობთ, რომ $1-4a\geq 0$.
(3.1) განტოლება (3.2) წარმოდგენის გათვალისწინებით მიიყვანება შემდეგ განტოლებათა სისტემაზე:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}-b_1\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+b_2J(\psi,W)\pm\alpha\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+b_5W+b_6V+b_7\psi=0,\\ \Delta V-\gamma_2V=-\dfrac{1}{a}W,\\ \Delta\psi-\gamma_1\psi=V,\end{cases} \tag{3.3}$$

სადაც

$$b_5=\frac{b_3}{a}, \qquad b_6=b_4-b_5, \qquad b_7=\gamma_1b_6+b_5.$$

(3.3) სისტემას ვხსნით $(x,y,t)\in Q_T=\Omega\times\left]0;T\right[$ ცილინდრულ არეში, სადაც Ω არის მართკუთხედი $\Omega=\left]-a_1;a_1\right[x\left]-a_2;a_2\right[$. საწყის პირობად $t=0$ მომენტში ვიღებთ: $\psi(x,y,0)=\psi_0(x,y)$, სადაც $\psi_0(x,y)$ არის საკმარისად გლუვი ფუნქცია. რაც შეეხება სასაზღვრო პირობებს, იგი აღებული იქნება სხვაობიან განტოლებათა სისტემაზე გადასვლის შემდეგ. ამასთან ვგულისხმობთ, რომ სასაზღვრო პირობები შეთანხმებული უნდა იყოს საწყის პირობებთან.

3.2 წონიანი არაცხადი სქემა

მოვახდინოთ (3.3) სისტემის პირველი განტოლების აპროქსიმაცია (x, y, t_k) წერტილში შემდეგი ნახევრად დისკრეტული სქემით:

$$\frac{W^k - W^{k-1}}{\tau} - b_1\left(\vartheta\frac{\partial\psi^k}{\partial x} + (1-\vartheta)\frac{\partial\psi^{k-1}}{\partial x}\right) + b_2\left(\vartheta J(\psi^{k-1}, W^k) + (1-\vartheta)J(\psi^k, W^{k-1})\right)\pm$$
$$\pm\alpha\left(\vartheta\psi^{k-1}\frac{\partial\psi^k}{\partial x} + (1-\vartheta)\psi^k\frac{\partial\psi^{k-1}}{\partial x}\right) + b_5\left(\vartheta W^k + (1-\vartheta)W^{k-1}\right)+ \tag{3.4}$$
$$+b_6\left(\vartheta V^k + (1-\vartheta)V^{k-1}\right) + b_7\left(\vartheta\psi^k + (1-\vartheta)\psi^{k-1}\right) = 0,$$

სადაც ϑ პარამეტრი მოთავსებულია $[0, 1]$ შუალედში.

სტანდარტული გზით ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (2.1) სხვაობიანი განტოლება ახდენს (3.3) სისტემის პირველი განტოლების აპროქსიმაციას $(x, y, t_{k-\frac{1}{2}})$ წერტილში $O(\tau^2 + (1-2\vartheta)\tau)$ რიგის სიზუსტით. ამრიგად $\vartheta = 1$-ს შემთხვევაში მიიღება არაცხადი სქემა (დროითი ცვლადის მიხედვით გაწრფივებული ყოველ t_k შრეზე) τ მიმართ პირველი რიგის სიზუსტის, ხოლო $\vartheta = 1/2$ შემთხვევაში - τ მიმართ მეორე რიგის სიზუსტის. $\vartheta = 0$-ს შემთხვევაში, კი მიიღება ცხადი-არაცხადი სქემა (ცხადი W-ს მიხედვით და არაცხადი ψ-ს მიხედვით).

თუ (3.4) განტოლებაში პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებს სივრცული ცვლადების მიმართ შევცვლით ცენტრალური სხვაობებით მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან განტოლებას:

$$\frac{W_{i,j}^k - W_{i,j}^{k-1}}{\tau} = b_1\left(\vartheta\frac{\psi_{i+1,j}^k - \psi_{i-1,j}^k}{2h_1} + (1-\vartheta)\frac{\psi_{i+1,j}^{k-1} - \psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1}\right) - b_2\left(\vartheta J(\psi_{i,j}^{k-1}, W_{i,j}^k) + (1-\vartheta)J(\psi_{i,j}^k, W_{i,j}^{k-1})\right)\pm$$
$$\pm\alpha\left(\vartheta\psi_{i,j}^{k-1}\frac{\psi_{i+1,j}^k - \psi_{i-1,j}^k}{2h_1} + (1-\vartheta)\psi_{i,j}^k\frac{\psi_{i+1,j}^{k-1} - \psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1}\right) - b_5\left(\vartheta W_{i,j}^k + (1-\vartheta)W_{i,j}^{k-1}\right) - \tag{3.5}$$
$$-b_6\left(\vartheta V_{i,j}^k + (1-\vartheta)V_{i,j}^{k-1}\right) + b_7\left(\vartheta\psi_{i,j}^k + (1-\vartheta)\psi_{i,j}^{k-1}\right),$$

სადაც $i = 1,\ldots, N_1 - 1$, $j = 1,\ldots, N_2 - 1$, $x_i = -a_1 + ih_1$, $y_j = -a_2 + jh_2$, $t_k = k\tau$ და

$$J(\psi_{i,j}^{k-1}, W_{i,j}^k) = \frac{\psi_{i+1,j}^{k-1} - \psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1}\frac{W_{i,j+1}^k - W_{i,j-1}^k}{2h_2} - \frac{\psi_{i,j+1}^{k-1} - \psi_{i,j-1}^{k-1}}{2h_2}\frac{W_{i+1,j}^k - W_{i-1,j}^k}{2h_1}.$$

დენის ფუნქციის ψ-ს აღდგენა ხდება W განზოგადებული გრიგალის და შუალედური V გრიგალის მიხედვით (1.3) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებების შესაბამისი შემდეგი სტანდარტული სხვაობიანი განტოლებიდან:

$$L_h[V_{i,j}^k] - \gamma_2 V_{i,j}^k = -\frac{1}{a}W_{i,j}^k, \tag{3.6}$$

$$L_h[\psi^k_{i,j}]-\gamma_1\psi^k_{i,j}=V^k_{i,j}\ ,\quad i=1,\dots,N_1-1\ ,\quad j=1,\dots,N_2-1\ , \tag{3.7}$$

სადაც L_h არის ლაპლასიანის შესაბამისი სხვაობიანი ოპერატორი,

$$L_h[\psi^k_{i,j}]=\frac{\psi^k_{i+1,j}-2\psi^k_{i,j}+\psi^k_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{\psi^k_{i,j+1}-2\psi^k_{i,j}+\psi^k_{i,j-1}}{h_2^2}\ .$$

(3.5), (3.6) და (3.7) სხვაობიანი განტოლებათა სისტემისთვის ვიღებთ შემდეგ საწყის და სასაზღვრო პირობებს:

$$W^0_{i,j}=-a\Delta^2\psi_0(x_i,y_j)+\Delta\psi_0(x_i,y_j)-\psi_0(x_i,y_j)\ ,\quad \psi^0_{i,j}=\psi_0(x_i,y_j)\ , \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}W^k_{0,j}=W^0_{0,j}\ ,\ W^k_{N_1,j}=W^0_{N_1,j}\ ,\ W^k_{i,0}=W^0_{i,0}\ ,\ W^k_{i,N_2}=W^0_{i,N_2}\ ,\\ V^k_{0,j}=V^0_{0,j}\ ,\ V^k_{N_1,j}=V^0_{N_1,j}\ ,\ V^k_{i,0}=V^0_{i,0}\ ,\ V^k_{i,N_2}=V^0_{i,N_2}\ ,\\ \psi^k_{0,j}=\psi^0_{0,j}\ ,\ \psi^k_{N_1,j}=\psi^0_{N_1,j}\ ,\ \psi^k_{i,0}=\psi^0_{i,0}\ ,\ \psi^k_{i,N_2}=\psi^0_{i,N_2}\ .\end{gathered} \tag{3.9}$$

ამრიგად (3.5)-(3.9) წარმოადგენს სრულ სისტემას. ბუნებრივია ბადური ფუნქციების მნიშვნელობები $W^k_{i,j}$, $V^k_{i,j}$ და $\psi^k_{i,j}$ გამოვაცხადოთ შესაბამისად $W(x,y,t)$, $V(x,y,t)$ და $\psi(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნების მიახლოებით მნიშვნელობებად (x_i,y_j,t_k) წერტილში.

(3.5)-(3.7) სხვაობიან განტოლებათა სისტემას ვხსნით შემდეგი იტერაციული პროცესის გამოყენებით:

$$\overset{m}{W}{}^k_{i,j}=W^{k-1}_{i,j}+\tau F(\psi^{k-1}_{i,j},\overset{m-1}{\psi}{}^k_{i,j},W^{k-1}_{i,j},\overset{m-1}{W}{}^k_{i,j},V^{k-1}_{i,j},\overset{m-1}{V}{}^k_{i,j})\ , \tag{3.10}$$

$$L_h[\overset{m}{V}{}^k_{i,j}]-\gamma_2\overset{m}{V}{}^k_{i,j}=-\frac{1}{a}\overset{m}{W}{}^k_{i,j}\ , \tag{3.11}$$

$$L_h[\overset{m}{\psi}{}^k_{i,j}]-\gamma_1\overset{m}{\psi}{}^k_{i,j}=\overset{m}{V}{}^k_{i,j}\ ,\quad i=1,\dots,N_1-1\ ,\quad j=1,\dots,N_2-1\ , \tag{3.12}$$

სადაც m არის იტერაციის ნომერი ($m=1,2,\dots$), F არის (3.5) განტოლების მარჯვენა მხარე.

(3.11) სხვაობიან განტოლებათა სისტემას და მის ანალოგიურ (3.12) სისტემას ვხსნით x ცვლადის მიმართ ფაქტორიზაციის მეთოდის, ხოლო y ცვლადის მიმართ იტერაციის გამოყენებით:

$$-\overset{m}{\psi}{}^k_{i+1,j}+a\overset{m}{\psi}{}^k_{i,j}-\overset{m}{\psi}{}^k_{i-1,j}=\alpha_0^2(\overset{m-1}{\psi}{}^k_{i,j+1}+\overset{m}{\psi}{}^k_{i,j-1})-h_1^2V^k_{i,j}\ , \tag{3.13}$$

სადაც m არის იტერაციის ნომერი ($m=1,2,\dots$), $\alpha_0=\dfrac{h_1}{h_2}$, $a=2+2\alpha_0^2+\gamma h_1^2$.

შენიშვნა. (3.10)-(3.12) იტერაციაში W^k, V^k და ψ^k ფუნქციების საწყის მიახლოებად ვიღებთ შესაბამისი ფუნქციების მნიშვნელობებს წინა $k-1$ შრეზე, რაც მნიშვნელოვნად აჩქარებს იტერაციული პროცესების კრებადობას.

3.3 ამონახსნის ერთადერთობა

სიმარტივისათვის Ω არე ავიღოთ ერთეულოვანი კვადრატი, $\Omega =]0;1[\times]0;1[$. (3.3) სისტემისათვის ვიხილავთ შემდეგ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას:

$$W(x,y,0)=W_0(x,y), \tag{3.14}$$

$$W(0,y,t)=W(1,y,t), \qquad W(x,0,t)=W(x,1,t), \tag{3.15}$$

$$V(0,y,t)=V(1,y,t), \quad V(x,0,t)=V(x,1,t),$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=1}, \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=1}, \tag{3.16}$$

$$\psi(0,y,t)=\psi(1,y,t), \qquad \psi(x,0,t)=\psi(x,1,t), \tag{3.17}$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=1}, \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{y=1}, \qquad \forall t\in[0;T]\ . \tag{3.18}$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა. თუ (3.3), (3.14-18) ამოცანის ამონახსნი $(W,V,\psi)\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)\times C^{3,0}(\overline{Q}_T)\times C^{5,0}(\overline{Q}_T)$, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. დაუშვათ (3.3), (3.14-18) ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი (W,V,ψ) და $(\widetilde{W},\widetilde{V},\widetilde{\psi})$, მაშინ ვექტორი (u,η,ζ) სადაც $u=W-\widetilde{W}$, $\eta=V-\widetilde{V}$ და $\zeta=\psi-\widetilde{\psi}$ დააკმაყოფილებს შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-b_1\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}+b_2J(\psi,u)+b_2J(\zeta,\widetilde{W})\pm\alpha\zeta\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\pm\alpha\widetilde{\psi}\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}+b_5u+b_6\eta+b_7\zeta=0, \\ \Delta\eta-\gamma_2\eta=-\dfrac{1}{a}u, \\ \Delta\zeta-\gamma_1\zeta=\eta, \end{cases} \tag{3.19}$$

(3.19) სისტემის პირველი განტოლების მიღებისთვის ჩვენ გამოვიყენეთ შემდეგი მარტივი ფორმულები:

$$J(\psi,W-\widetilde{W})=J(\psi,W)-J(\psi,\widetilde{W}) \ ,$$
$$J(\psi-\widetilde{\psi},\widetilde{W})=J(\psi,\widetilde{W})-J(\widetilde{\psi},\widetilde{W}) \ .$$

(3.19) სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ u-ზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე , მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial u^2}{\partial t}dxdy-b_1\int_\Omega\frac{\partial\zeta}{\partial x}udxdy+b_2\int_\Omega J(\psi,u)udxdy+b_2\int_\Omega J(\zeta,\widetilde{W})udxdy\pm$$
$$\alpha\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial x}\zeta udxdy\pm\alpha\int_\Omega\frac{\partial\zeta}{\partial x}\widetilde{\psi}udxdy+b_5\int_\Omega u^2dxdy+b_6\int_\Omega\eta udxdy+b_7\int_\Omega\zeta udxdy=0.$$

ვაჩვენოთ, რომ მართებულია ტოლობა:

$$\int_{\Omega} J(\psi,u)u dxdy = 0.$$

მართლაც გვაქვს:

$$\int_{\Omega} J(\psi,u)u dxdy = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial u^2}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)dxdy = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dy - \frac{1}{2}\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(u^2(x,1,t)\frac{\partial\psi(x,1,t)}{\partial x} - u^2(x,0,t)\frac{\partial\psi(x,0,t)}{\partial x}\right)dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left(u^2(1,y,t)\frac{\partial\psi(1,y,t)}{\partial y} - u^2(0,y,t)\frac{\partial\psi(0,y,t)}{\partial y}\right)dy = 0\,.$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ პირობები:

$$\frac{\partial\psi(x,1,t)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(x,0,t)}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial\psi(1,y,t)}{\partial y} = \frac{\partial\psi(0,y,t)}{\partial y}\,,$$

რომლებიც გამომდინარეობს (3.17) სასაზღვრო პირობებიდან.

როგორც ცნობილია, თუ (3.19) სისტემის მესამე განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ζ-ზე და ვაინტეგრებთ Ω არეზე, ამასთან გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას და გავითვალისწინებთ რომ ζ ფუნქცია აკმაყოფილებს პერიოდულ სასაზღვრო პირობებს, მაშინ მივიღებთ (იხ. [დ]):

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + \gamma_2\int_{\Omega}\zeta^2 dxdy = -\int_{\Omega}\eta\zeta dxdy\,. \tag{3.20}$$

ანალოგიურად (3.6) სისტემის მეორე განტოლებიდან მიიღება:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + \gamma_1\int_{\Omega}\eta^2 dxdy = \frac{1}{a}\int_{\Omega}u\eta dxdy\,. \tag{3.21}$$

შვარცის უტოლობისა და ε-უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_{\Omega}|u\eta|dxdy \le \left(\int_{\Omega}u^2 dxdy\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}\eta^2 dxdy\right)^{1/2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega}u^2 dxdy + \varepsilon^2\int_{\Omega}\eta^2 dxdy\right)\,. \tag{3.22}$$

შევარჩიოთ $\varepsilon > 0$, ისე რომ შესრულდეს პირობა:

$$\alpha_1 = \gamma_1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 > 0\,,$$

მაშინ (3.21)-დან (3.22)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + \alpha_1\int_{\Omega}\eta^2 dxdy \le c_1\int_{\Omega}u^2 dxdy\,, \tag{3.23}$$

სადაც $c_1 = const > 0$.

ანალოგიურად (3.21)-დან მიიღება:

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\alpha_2\int_\Omega \zeta^2 dxdy \le c_2\int_\Omega \eta^2 dxdy\,, \tag{3.24}$$

სადაც α_2 და c_2 დადებითი კონსტანტებია.

ცხადია (3.24)-დან (3.23)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\alpha_2\int_\Omega \zeta^2 dxdy \le c_0\int_\Omega u^2 dxdy\,, \tag{3.25}$$

სადაც $c_0 = const > 0$.

შევაფასოთ $J(\zeta,\widetilde{W})$ იაკობიანის შემცველელი წევრი (3.18)-დან. ცხადია მართებულია უტოლობა:

$$\int_\Omega \left|J(\zeta,\widetilde{W})u\right|dxdy \le \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial x}\right|\right)|u|dxdy \le c_3\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|\right)|u|dxdy\,, \tag{3.26}$$

$$c_3=\max_{(x,y,t)}\left(\left|\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial y}\right|\right),\qquad (x,y,t)\in\overline{Q}_T\,.$$

შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|\right)|u|dxdy \le \left[\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 dxdy\right)^{1/2}+\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 dxdy\right)^{1/2}\right]\left(\int_\Omega u^2 dxdy\right)^{1/2}. \tag{3.27}$$

(3.26)-დან (3.27)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ

$$\left(\int_\Omega \left|J(\zeta,\widetilde{W})u\right|dxdy\right)^2 \le 2c_1^2\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 dxdy+\int_\Omega \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 dxdy\right)\int_\Omega u^2 dxdy\,. \tag{3.28}$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ტრივიალური უტოლობა: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$.

(3.28)-დან (3.25)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\int_\Omega \left|J(\zeta,\widetilde{W})u\right|dxdy \le c_4\int_\Omega u^2 dxdy,\qquad c_4=const>0\,. \tag{3.29}$$

შევაფასოთ სკალარული არაწრფივობის შესაბამისი წევრები (3.18)-დან. შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\zeta u\right|dxdy+\int_\Omega \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\widetilde{\psi}u\right|dxdy \le c_5\int_\Omega |\zeta u|dxdy+c_6\int_\Omega \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}u\right|dxdy \le \\ &\le c_5\left(\int_\Omega \zeta^2 dxdy\right)^{1/2}\left(\int_\Omega u^2 dxdy\right)^{1/2}+c_6\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 dxdy\right)^{1/2}\left(\int_\Omega u^2 dxdy\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{3.30}$$

სადაც

$$c_5 = \max_{(x,y,t)} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|, \qquad c_6 = \max_{(x,y,t)} \left| \tilde{\psi} \right|, \qquad (x,y,t) \in \overline{Q}_T \, .$$

ცხადია (3.26)-დან გამომდინარეობს:

$$\partial \int_\Omega \zeta^2 dxdy \le \frac{c_0}{\alpha_2} \int_\Omega u^2 dxdy \, , \tag{3.31}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 dxdy \le c_0 \int_\Omega u^2 dxdy \, . \tag{3.32}$$

(3.30)-დან (3.31) და (3.32)-ის გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \zeta u \right| dxdy + \int_\Omega \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \tilde{\psi} u \right| dxdy \le c_7 \int_\Omega u^2 dxdy \, , \tag{3.33}$$

სადაც $c_7 = const > 0$.

(3.33)-ის ანალოგიურად მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| dxdy \le c_8 \int_\Omega u^2 dxdy, \tag{3.34}$$

ცხადია (3.23) და (3.25) უტოლობების გათვალისწინებით მართებულია შეფასება:

$$|b_6| \int_\Omega |\eta u| dxdy + |b_6| \int_\Omega |\zeta u| dxdy \le c_9 \int_\Omega u^2 dxdy \, , \qquad c_9 = const > 0 \, . \tag{3.35}$$

(3.18)-დან (3.29), (3.33), (3.34), (3.35) შეფასებებისა და (3.19) ტოლობის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\frac{dE(t)}{dt} \le cE(t) \quad , \qquad c = const > 0 \, , \tag{3.36}$$

სადაც

$$E(t) = \int_\Omega u^2 dxdy \quad .$$

როგორც ცნობილია (3.36)-დან გამომდინარეობს:

$$E(t) \le e^{ct} E(0) \, . \tag{3.37}$$

რადგან პირობის თანახმად $E(0) = 0$, ამიტომ ცხადია (3.37)-დან მიიღება:

$$E(t) = \int_\Omega u^2 dxdy \equiv 0 \, .$$

აქედან კი გამომდინარეობს რომ $u(x,y,t) \equiv 0$ ან რაც იგივეა $W(x,y,t) \equiv \widetilde{W}(x,y,t)$. ამ იგივეობის გათვალისწინებით (3.23) და (3.25) უტოლობებიდან შესაბამისად გამომდინარეობს: $\eta(x,y,t) \equiv 0$ და $\zeta(x,y,t) \equiv 0$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

3.4 ენერგიის განტოლება

(3.1) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ ψ და ვაინტეგროთ Ω არეზე, მივიღებთ:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(-a\Delta^2\psi + \Delta\psi - \psi)\psi dxdy - b_1\int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x}\psi dxdy + b_2\int_{\Omega} J(\psi, -a\Delta^2\psi + \Delta\psi)\psi dxdy +$$
$$+\alpha\int_{\Omega} \psi^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dxdy - b_3\int_{\Omega} \Delta^2\psi\psi dxdy + b_4\int_{\Omega} \Delta\psi\psi dxdy = 0. \tag{3.38}$$

ვთქვათ Ω არე მთელი სიბრტყეა და ψ დენის ფუნქცია თავის წარმოებულებთან ერთად ქრობადია უსასრულობაში, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$-\int_{\Omega} \Delta\psi\psi dxdy = -\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right)dxdy \quad , \quad \int_{\Omega} \Delta^2\psi\psi dxdy = \int_{\Omega} (\Delta\psi)^2 dxdy \quad , \tag{3.39}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)\psi dxdy = \int_{\Omega} \Delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\psi dxdy = -\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dxdy =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right)dxdy , \tag{3.40}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta^2\psi)\psi dxdy = \int_{\Omega} \Delta^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\psi dxdy = \int_{\Omega} \Delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\Delta\psi dxdy =$$
$$= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)\Delta\psi dxdy = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)^2 dxdy , \tag{3.41}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x}\psi dxdy = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial \psi^2}{\partial x} dxdy = 0 , \qquad \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x}\psi^2 dxdy = \frac{1}{3}\int_{\Omega} \frac{\partial \psi^3}{\partial x} dxdy = 0 , \tag{3.42}$$

$$\int_{\Omega} J(\psi, W)\psi dxdy = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial \psi^2}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \psi^2}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}\right)dxdy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^2\frac{\partial W}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi^2\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right]dxdy = 0 \quad , \tag{3.43}$$

სადაც

$$W = -a\Delta^2\psi + \Delta\psi - \psi .$$

(3.38)-დან (3.39-43) ტოლობების გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\frac{dE(t)}{dt}+b_3\int_\Omega(\Delta\psi)^2\,dxdy+b_4\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)dxdy=0\,, \qquad (3.44)$$

სადაც

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left((\Delta\psi)^2+\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)+\psi^2\right)dxdy\,.$$

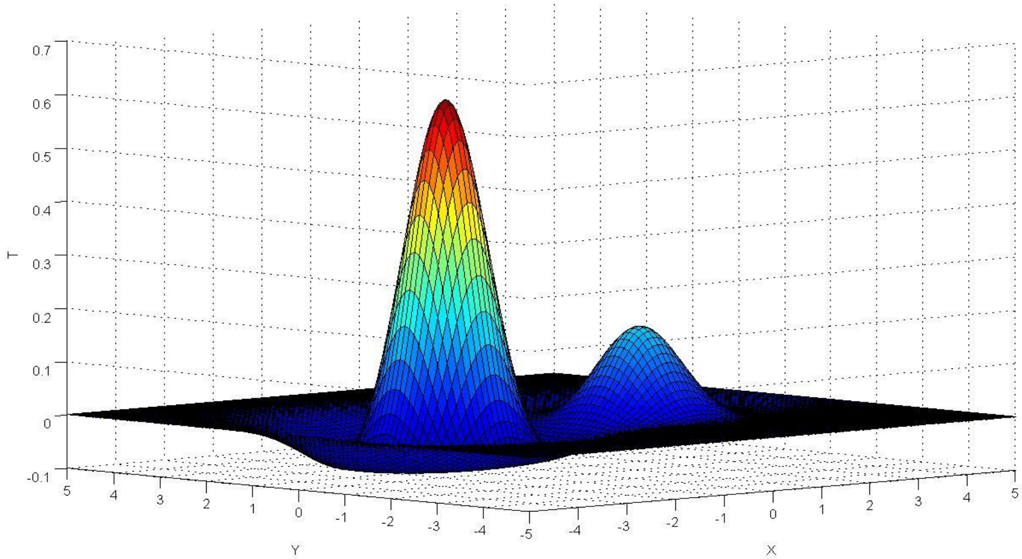
(3.44) ტოლობიდან გამომდინარეობს , რომ $\frac{dE(t)}{dt}\le 0$. ამასთან რადგან $\frac{dE(t)}{dt}$ არ უდრის იგიურად ნულს (ვგულისხმობთ, რომ დენის ფუნქცია ψ არ უდრის იგიურად ნულს) ამიტომ ცხადია ადგილი აქვს ენერგიის კლებას, რაც ასევე დასტურდება რიცხვითი გათვლების შედეგად.

გრაფიკული ვიზუალიზაცია

საწყისი პირობა: $\psi_0(x,y)=\frac{1}{2}e^{-(x-2)^2-y^2}+2e^{-(x+2)^2-y^2}$ $\qquad \Omega=\left]-5;5\right[x\left]-5;5\right[$

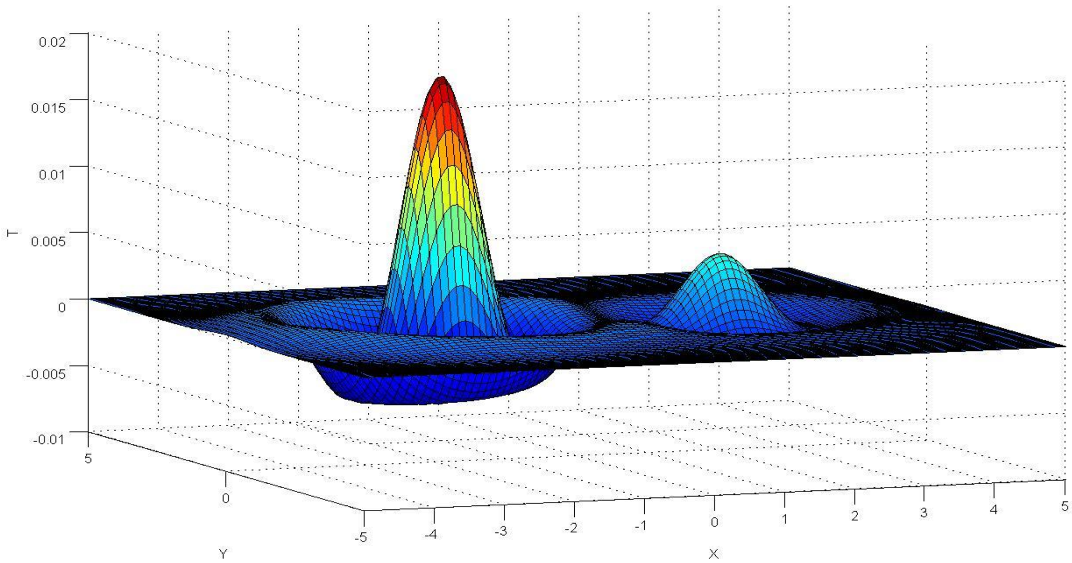
1)

a1	a2	a	b1	b2	b3	b4	teta	alfa	T
5	5	0.2	0.2	0.1	0.1	0.8	0.5	0.5	1



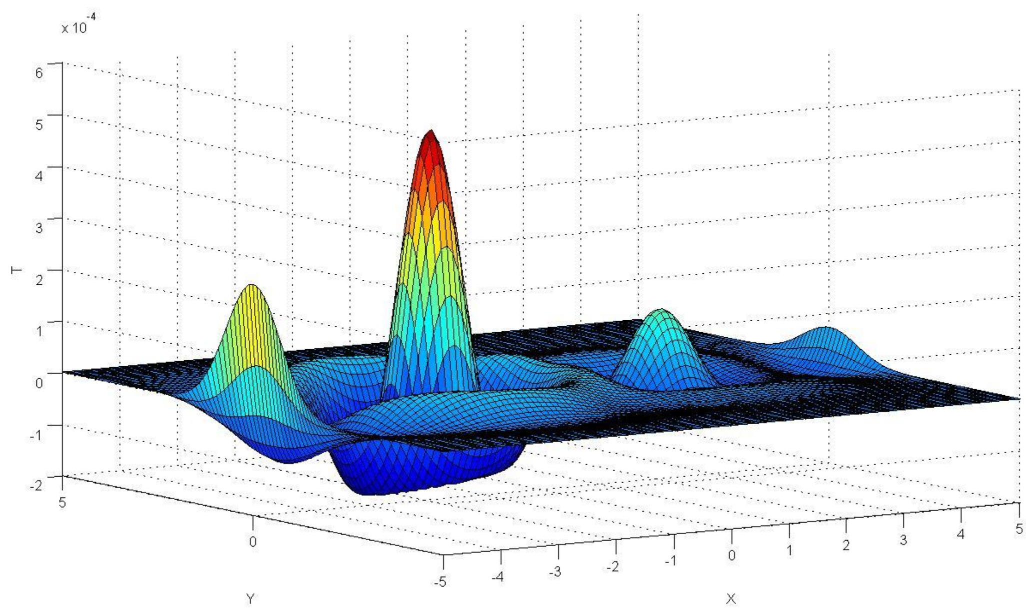
2)

a1	a2	a	b1	b2	b3	b4	teta	alfa	T
5	5	0.2	0.2	0.1	0.1	0.8	0.5	0.5	5



3)

a1	a2	a	b1	b2	b3	b4	teta	alfa	T
5	5	0.2	0.2	0.1	0.1	0.8	0.5	0.5	5



თავი 4. არაცხადი სხვაობიანი სქემები ჩარნი-ობუხოვისა და ჰასაგევა-მიმას განტოლებებისათვის სკალარული არაწრფივობის გათვალისწინებით

4.1 ამოცანის დასმა

უგანზომილებო ცვლადებში ჩარნი-ობუხოვისა და ჰასაგევა-მიმას არაწრფივი განტოლე-ბებს OX ღერძის გასწვრივ v სიჩქარით მოძრავ კორდინატთა სისტემაში ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial(\Delta\psi-\gamma\psi)}{\partial t}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}-v\frac{\partial(\Delta\psi-\gamma\psi)}{\partial x}+\sigma J(\psi,\Delta\psi)\pm\alpha\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \tag{4.1}$$

სადაც α,β,σ და v დადებითი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან გარემოს ფიზიკური მახასიათებლების საშუალებით. ჰასაგევა-მიმას განტოლება (α-ს წინ მინუს ნიშანი) აღწერს ტალღების არაწრფივ დინებებს. $\psi(x,y,t)$ უწოდებენ შეშფოთების პოტენციალს. ჩარნი-ობუხოვის განტოლება (α-ს წინ პლიუს ნიშანი) აღწერს არაწრფივ როსბის ტალღას. $\psi(x,y,t)$ უწოდებენ დენის ფუნქციას. $J(\psi,\Delta\psi)$ არის იაკობიანი,

$$J(\psi,\Delta\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$W=\Delta\psi-\gamma\psi+\beta y.$$

მაშინ (4.1) განტოლება ამ აღნიშვნის შედეგად მიიყვანება შემდეგ განტოლებთა სისტემაზე:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\sigma J(\psi,W)-v\dfrac{\partial W}{\partial x}+\beta(1-\sigma)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}-\alpha\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0 & (4.2)\\ \Delta\psi-\gamma\psi=W-\beta y & (4.3)\end{cases}$$

(4.2)–(4.3) სისტემას ვხსნით $(x,y,t)\in Q_T=\Omega\times\left]0;T\right[$ ცილინდრულ არეში, სადაც Ω არის მართკუთხედი $\Omega=\left]-a_1;a_1\right[\times\left]-a_2;a_2\right[$. (x,y) სივრცული ცვლადები იცვლებიან Ω არეში, ხოლო ცვლადი t იცვლება ინტერვალზე $\left]0;T\right[$. საწყის პირობად $t=0$ მომენტში ვიღებთ: $\psi(x,y,0)=\psi_0(x,y)$, სადაც $\psi_0(x,y)$ არის საკმარისად გლუვი ფუნქცია. რაც შეეხება სასაზღვრო პირობებს, იგი აღებული იქნება სხვაობიან განტოლებათა სისტემაზე გადასვლის შემდეგ. ამასთან ვგულისხმობთ, რომ სასაზღვრო პირობები შეთანხმებული უნდა იყოს საწყის პირობასთან.

4.2 დროითი ბიჯის მიმართ პირველი რიგის სიზუსტის არაცხადი სქემა

შემოვიტანოთ დროითი ბიჯი $\tau = \mathrm{T}/m \ (m > 1)$ და მოვახდინოთ (4.2) სისტემის პირველი განტოლების აპროქსიმაცია (x, y, t_k) წერტილში შემდეგი ნახევრად დისკრეტული სქემით:

$$\frac{W^k - W^{k-1}}{\tau} + \sigma\left(\frac{\partial \psi^{k-1}}{\partial x}\frac{\partial W^k}{\partial y} - \frac{\partial \psi^{k-1}}{\partial y}\frac{\partial W^k}{\partial x}\right) - \nu\frac{\partial W^k}{\partial x} + \beta(1-\sigma)\frac{\partial \psi^k}{\partial x} - \alpha\psi^{k-1}\frac{\partial \psi^k}{\partial x} = 0. \quad (4.4)$$

ჩვენ ვუშვებთ რომ $W(x, y, t)$ და $\psi(x, y, t)$ არის საკმარისად გლუვი ფუნქციები.
(4.4) სხვაობიანი განტოლება ახდენს (4.2) განტოლების აპროქსიმაციას (x, y, t_k) წერტილში $O(\tau)$ რიგის სიზუსტით.

Ω არე დავფაროთ ბადით. დაყოფათა რიცხვი x-ით და y-ით ავღნიშნოთ შესაბამისად $\mathrm{N}_1 (> 1)$ და $\mathrm{N}_2 (> 1)$-ით, ხოლო ბიჯები – h_1 და h_2-ით,

$$h_1 = \frac{2a_1}{\mathrm{N}_1}, \qquad h_2 = \frac{2a_2}{\mathrm{N}_2}.$$

თუ (4.4) განტოლებაში პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებს სივრცული ცვლადების მიმართ შევცვლით ცენტრალური სხვაობებით მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან განტოლებას:

$$\begin{aligned}
&\frac{W_{i,j}^k - W_{i,j}^{k-1}}{\tau} - \nu\frac{W_{i+1,j}^k - W_{i-1,j}^k}{2h_1} + \beta(1-\sigma)\frac{\psi_{i+1,j}^k - \psi_{i-1,j}^k}{2h_1} + \\
&+ \sigma\left(\frac{\psi_{i+1,j}^{k-1} - \psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1}\frac{W_{i,j+1}^k - W_{i,j-1}^k}{2h_2} - \frac{\psi_{i,j+1}^{k-1} - \psi_{i,j-1}^{k-1}}{2h_2}\frac{W_{i+1,j}^k - W_{i-1,j}^k}{2h_1}\right) \qquad (4.5)\\
&- \alpha\psi^{k-1}\frac{\psi_{i+1,j}^k - \psi_{i-1,j}^k}{2h_1} = 0,
\end{aligned}$$

სადაც $i = 1, ..., N_1 - 1$, $j = 1, ..., N_2 - 1$

(4.5) განტოლების ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი პირველი შესაკრები გვაძლევს W ფუნქციის t-თი წარმოებულის აპროქსიმაციას (x_i, y_j, t_k) წერტილში ($x_i = -a_1 + ih_1$, $y_j = -a_2 + jh_2$, $t_k = k\tau$) $O(\tau)$ რიგის სიზუსტით. შესაკრების მეორე და მესამე წევრები (ცენტრალური სხვაობები W და ψ ფუნქციების) იმავე წერტილში გვაძლევს W და ψ ფუნქციების x-თი წარმოებულის აპროქსიმაციას, სადაც აპროქსიმაციის რიგი არის $O(h_1^2)$. დამატებით ამ (4.5) განტოლების არაწრფივი წევრებისათვის ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\psi(x_{i+1},\ y_j,t_{k-1})-\psi(x_{i-1},\ y_j,t_{k-1})}{2h_1}\frac{W(x_{i},\ y_{j+1},t_k)-W(x_{i},\ y_{j-1},t_k)}{2h_2}=$$
$$=\frac{\partial\psi(x_i,y_j,t_k)}{\partial x}\frac{\partial W(x_i,y_j,t_k)}{\partial y}+\mathrm{O}(\tau+h_1^2+h_2^2).$$

$$\frac{\psi(x_{i},\ y_{j+1},t_{k-1})-\psi(x_{i},\ y_{j-1},t_{k-1})}{2h_2}\frac{W(x_{i+1},\ y_{j},t_k)-W(x_{i-1},\ y_{j},t_k)}{2h_1}=$$
$$=\frac{\partial\psi(x_i,y_j,t_k)}{\partial y}\frac{\partial W(x_i,y_j,t_k)}{\partial x}+\mathrm{O}(\tau+h_1^2+h_2^2).$$

$$\psi(x_{i},\ y_j,t_{k-1})\frac{\psi(x_{i+1},\ y_j,t_k)-\psi(x_{i-1},\ y_j,t_k)}{2h_1}=\psi(x_{i},\ y_j,t_k)\frac{\partial\psi(x_i,y_j,t_k)}{\partial x}+\mathrm{O}(\tau+h_1^2+h_2^2).$$

(4.5) სხვაობიანი განტოლება აპროქსიმაციას უკეთებს (4.2) განტოლებას $\mathrm{O}(\tau+h_1^2+h_2^2)$ სიზუსტით (x_i,y_j,t_k) წერტილში.

დენის ფუნქციის ψ-ს აღდგენა ხდება W განზოგადებული გრიგალის მიხედვით (4.3) განტოლების შესაბამისი შემდეგი სტანდარტული სხვაობიანი განტოლებიდან:

$$\frac{\psi_{i+1,j}^k-2\psi_{i,j}^k+\psi_{i-1,j}^k}{h_1^2}+\frac{\psi_{i,j+1}^k-2\psi_{i,j}^k+\psi_{i,j-1}^k}{h_2^2}-\gamma\psi_{i,j}^k=W_{i,j}^k-\beta y_j, \tag{4.6}$$

სადაც $i=1,...,N_1-1$, $j=1,...,N_2-1$

(4.6) სხვაობიანი განტოლება აპროქსიმაციას უკეთებს (4.3) განტოლებას $\mathrm{O}(h_1^2+h_2^2)$ სიზუსტით $(x_i,y_j,\ t_k)$ წერტილში.

(4.5) და (4.6) სხვაობიანი განტოლებათა სისტემის ამოსხსნისათვის ვიღებთ შემდეგ საწყის და სასაზღვრო პირობებს:

$$W_{i,j}^0=\Delta\psi_0(x_i,y_j)-\gamma\psi_0(x_i,y_j)+\beta y_j, \tag{4.7}$$

$$W_{0,j}^k=W_{0,j}^0\ ,\ W_{N_1,j}^k=W_{N_1,j}^0\ ,\ W_{i,0}^k=W_{i,0}^0\ ,\ W_{i,N_2}^k=W_{i,N_2}^0\ , \tag{4.8}$$

$$\psi_{i,j}^0=\psi_0(x_i,y_j)\ , \tag{4.9}$$

$$\psi_{0,j}^k=\psi_0(-a_1,y_j)\ ,\ \psi_{N_1,j}^k=\psi_0(a_1,y_j)\ ,\ \psi_{i,0}^k=\psi_0(x_i,-a_2)\ ,\ \psi_{i,N_2}^k=\psi_0(x_i,a_2) \tag{4.10}$$

სადაც $i=0,1,...,N_1$, $j=0,1,...,N_2$, $k=1,...,m$.

ამრიგად (4.5)-(4.7) წარმოადგენს სრულ სისტემას. ბუნებრივია ბადური ფუნქციების მნიშვნელობები $W_{i,j}^k$ და $\psi_{i,j}^k$ გამოვაცხადოთ შესაბამისად $W(x,y,t)$ და $\psi(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნების მიახლოებით მნიშვნელობებად (x_i,y_j,t_k) წერტილში.

(4.5)–(4.6) სხვაობიან განტოლებათა სისტემას ვხსნით შემდეგი იტერაციული პროცესის გამოყენებით (სიმარტივისათვის ინდექს k-ს გამოვტოვებთ $W_{i,j}^k$ და $\psi_{i,j}^k$-ში):

$$
\begin{aligned}
\overset{n}{W}_{i,j} = {} & \frac{1}{2}\alpha_1(\sigma\,\delta_y\psi_{i,j}^{k-1}+v)(\overset{n-1}{W}_{i+1,j}-\overset{n-1}{W}_{i-1,j})-\frac{1}{2}\alpha_2\,\sigma\,\delta_x\psi_{i,j}^{k-1}(\overset{n-1}{W}_{i,j+1}-\overset{n-1}{W}_{i,j-1}) \\
& -\frac{1}{2}\alpha_1(\beta(1-\sigma)-\alpha\,\psi_{i,j}^{k-1})(\overset{n-1}{\psi}_{i+1,j}-\overset{n-1}{\psi}_{i-1,j})+W_{i,j}^{k-1}
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

$$
\frac{\overset{n}{\psi}_{i+1,j}-2\overset{n}{\psi}_{i,j}+\overset{n}{\psi}_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{\overset{n}{\psi}_{i,j+1}-2\overset{n}{\psi}_{i,j}+\overset{n}{\psi}_{i,j-1}}{h_2^2}-\gamma\,\overset{n}{\psi}_{i,j}=\overset{n}{W}_{i,j}-\beta y_j, \tag{4.12}
$$

სადაც n არის იტერაციის ნომერი ($n=1,2,\ldots$), $\alpha_1=\tau/h_1$, $\alpha_2=\tau/h_2$, $\overset{0}{W}_{i,j}=W_{i,j}^{k-1}$,

$$
\delta_x\psi_{i,j}^{k-1}=\frac{\psi_{i+1,j}^{k-1}-\psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1},\quad \delta_y\psi_{i,j}^{k-1}=\frac{\psi_{i,j+1}^{k-1}-\psi_{i,j-1}^{k-1}}{2h_2}.
$$

წინა შრიდან მომდევნო შრეზე გადასვლის ბიჯი τ შეირჩევა შემდეგი პირობიდან:

$$
\begin{aligned}
& q=\alpha_1\,\sigma\max_{i,j}\left|\delta_y\psi_{i,j}^{k-1}+v\right|+\alpha_2\,\sigma\max_{i,j}\left|\delta_x\psi_{i,j}^{k-1}\right|+\frac{1}{\gamma}\alpha_1(\alpha\max_{i,j}\left|\psi_{i,j}^{k-1}\right|+\beta\left|1-\sigma\right|)<1, \\
& i=1,\ldots,N_1-1,\quad j=1,\ldots,N_2-1,
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

რომელიც წარმოადგენს იტერაციული პროცესის კრებადობის საკმარის პირობას. დავამტკიცოთ ამ წინადადების მართებულობა. პირველ რიგში შევაფასოთ ორ მომდევნო იტერაციას შორის სხვაობა. (4.11) დან გვაქვს:

$$
\begin{aligned}
\left|\overset{n+1}{W}_{i,j}-\overset{n}{W}_{i,j}\right| \le {} & \frac{1}{2}\alpha_1\,\sigma\left|\delta_y\psi_{i,j}^{k-1}+v\right|\left(\left|\overset{n}{W}_{i+1,j}-\overset{n-1}{W}_{i+1,j}\right|+\left|\overset{n}{W}_{i-1,j}-\overset{n-1}{W}_{i-1,j}\right|\right)+ \\
& +\frac{1}{2}\alpha_2\,\sigma\left|\delta_x\psi_{i,j}^{k-1}\right|\left(\left|\overset{n}{W}_{i,j+1}-\overset{n-1}{W}_{i,j+1}\right|+\left|\overset{n}{W}_{i,j-1}-\overset{n-1}{W}_{i,j-1}\right|\right)+ \\
& +\frac{1}{2}\alpha_1(\alpha\left|\psi_{i,j}^{k-1}\right|+\left|\beta(1-\sigma)\right|)\left(\left|\overset{n}{\psi}_{i+1,j}-\overset{n-1}{\psi}_{i+1,j}\right|+\left|\overset{n}{\psi}_{i-1,j}-\overset{n-1}{\psi}_{i-1,j}\right|\right)\le \\
& \le\left(\alpha_1\,\sigma\left|\delta_y\psi_{s,k}^{k-1}+v\right|+\alpha_2\,\sigma\left|\delta_x\psi_{s,k}^{k-1}\right|\right)\mu_n+\alpha_1(\alpha\left|\psi_{i,j}^{k-1}\right|+\left|\beta(1-\sigma)\right|)\,\nu_n, \\
& i=1,\ldots,N_1-1\ ,\ \ j=1,\ldots,N_2-1\ ,
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

სადაც

$$
\mu_n=\max_{s,k}\left|\overset{n}{W}_{s,k}-\overset{n-1}{W}_{s,k}\right|,\qquad \nu_n=\max_{s,k}\left|\overset{n}{\psi}_{s,k}-\overset{n-1}{\psi}_{s,k}\right|,\qquad s=1,\ldots,N_1-1,\quad k=1,\ldots,N_2-1.
$$

თუ ჩვენ (4.12)-ში საიტერაციო ინდექს n-ს შევცვლით $n-1$-ით და პირველ ტოლობას გამოვაკლებთ მეორეს, მაშინ მივიღებთ:

$$
\frac{\overset{n}{\zeta}_{i+1,j}-2\overset{n}{\zeta}_{i,j}+\overset{n}{\zeta}_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{\overset{n}{\zeta}_{i,j+1}-2\overset{n}{\zeta}_{i,j}+\overset{n}{\zeta}_{i,j-1}}{h_2^2}-\gamma\,\overset{n}{\zeta}_{i,j}=\overset{n}{W}_{i,j}-\overset{n-1}{W}_{i,j}, \tag{4.15}
$$

სადაც

$$
\overset{n}{\zeta}_{i,j}=\overset{n}{\psi}_{i,j}-\overset{n-1}{\psi}_{i,j}.
$$

(4.15)-დან ვღებულობთ:

$$a\left|\overset{n}{\zeta}_{i,j}\right| \le \left|\overset{n}{\zeta}_{i+1,j}\right| + \left|\overset{n}{\zeta}_{i-1,j}\right| + \alpha_0^2\left(\left|\overset{n}{\zeta}_{i,j+1}\right| + \left|\overset{n}{\zeta}_{i,j-1}\right|\right) + h_1^2\left|\overset{n}{W}_{i,j} - \overset{n-1}{W}_{i,j}\right|, \tag{4.16}$$

სადაც

$$i = 1,\dots,N_1 - 1 \ , \quad j = 1,\dots,N_2 - 1 \ , \quad \alpha_0 = \frac{h_1}{h_2}, \quad a = 2 + 2\alpha_0^2 + \gamma h_1^2.$$

(4.15)-დან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$a\left|\overset{n}{\zeta}_{i,j}\right| \le 2\left(1+\alpha_0^2\right)\nu_n + h_1^2\mu_n \tag{4.17}$$

რადგან $\left|\overset{n}{\zeta}_{i,j}\right|$ ნულის ტოლია საზღვარზე, ამიტომ ის მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას ბადის შიდა კვანძზე. (4.16)-დან გამომდინარეობს:

$$a\nu_n \le 2\left(1+\alpha_0^2\right)\nu_n + h_1^2\mu_n,$$

ან

$$\nu_n \le \frac{1}{\gamma}\mu_n. \tag{4.18}$$

(4.14)-დან (4.13)-ისა და (4.17)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\left|\overset{n+1}{W}_{i,j} - \overset{n}{W}_{i,j}\right| \le q\,\mu_n, \qquad i = 1,\dots,N_1 - 1 \ , \ j = 1,\dots,N_2 - 1 \ , \tag{4.19}$$

სადაც q განსაზღვრულია (4.13) პირობიდან. რადგან $\left|\overset{n+1}{W}_{i,j} - \overset{n}{W}_{i,j}\right|$ ნულის ტოლია საზღვარზე, ამიტომ ის მაქსიმუმს მიაღწევს ბადის შიდა კვანძზე. (4.19)-დან გამომდინარეობს:

$$\mu_{n+1} \le q\mu_n,$$

რომლიდანაც (4.13) პირობის გათვალისწინებით გამომდინარეობს (4.11)–(4.12) იტერაციული პროცესის კრებადობა გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით.

ჩვენ ვხსნით (4.6) სხვაობიან განტოლებათა სისტემას ფაქტორიზაციის მეთოდით x-ცვლადის მიმართ, ხოლო y ცვლადის მიმართ იტერაციით (სიმარტივისათვის ინდექს k-ს გამოვტოვებთ $\psi_{i,j}^k$-ში):

$$-\overset{n}{\psi}_{i+1,j} + a\overset{n}{\psi}_{i,j} - \overset{n}{\psi}_{i-1,j} = \alpha_0^2(\overset{n-1}{\psi}_{i,j+1} + \overset{n}{\psi}_{i,j-1}) - h_1^2(W_{i,j}^k - \beta y_j), \tag{4.20}$$

სადაც $i = 1,\dots,N_1 - 1$, $j = 1,\dots,N_2 - 1$, ხოლო n არის იტერაციის ნომერი ($n = 1,2,\dots$),

$$\alpha_0 = \frac{h_1}{h_2}, \qquad a = 2 + 2\alpha_0^2 + \gamma h_1^2.$$

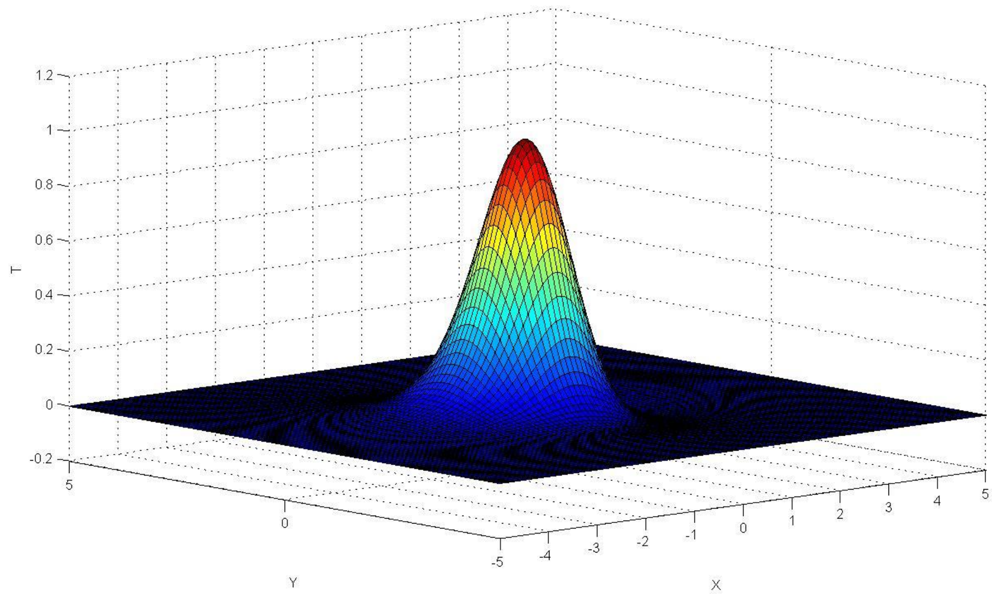
შენიშვნა. (4.11) და (4.12) იტერაციებში W^k და ψ^k ფუნქციების საწყის მიახლოებად ვიღებთ შესაბამისი ფუნქციების მნიშვნელობებს წინა $k-1$ შრეზე, რაც მნიშვნელოვნად აჩქარებს იტერაციული პროცესის კრებადობას.

გრაფიკული შედეგები

საწყისი პირობა: $\psi_0(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $\Omega =]-5;5[x]-5;5[$

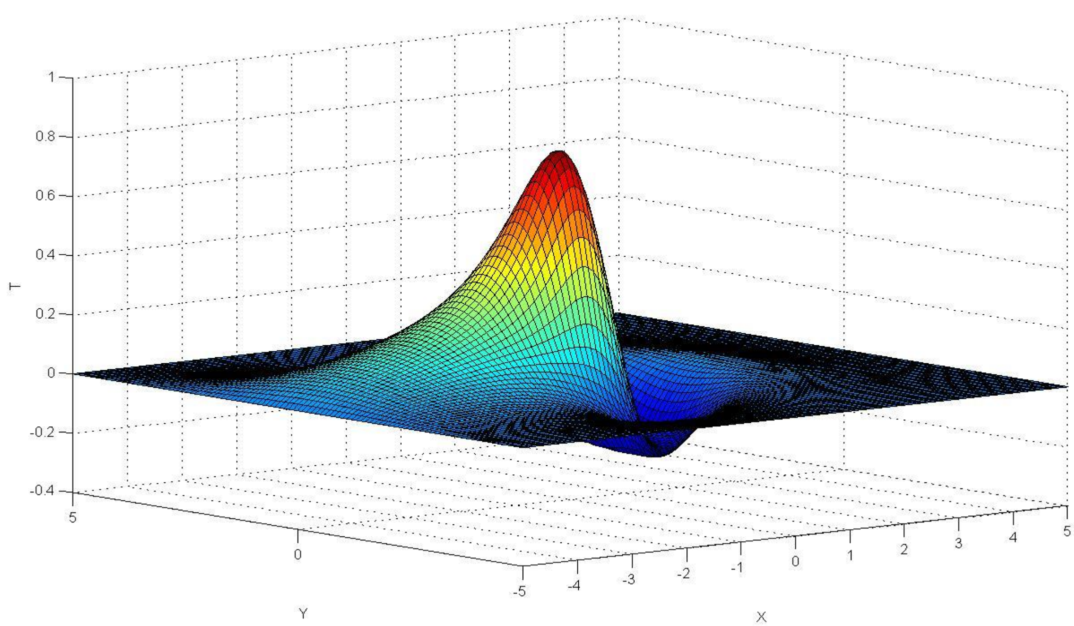
1)

a1	a2	alfa	beta	gama	sigma	V	T
5	5	1	1	1	0.5	0	1



2)

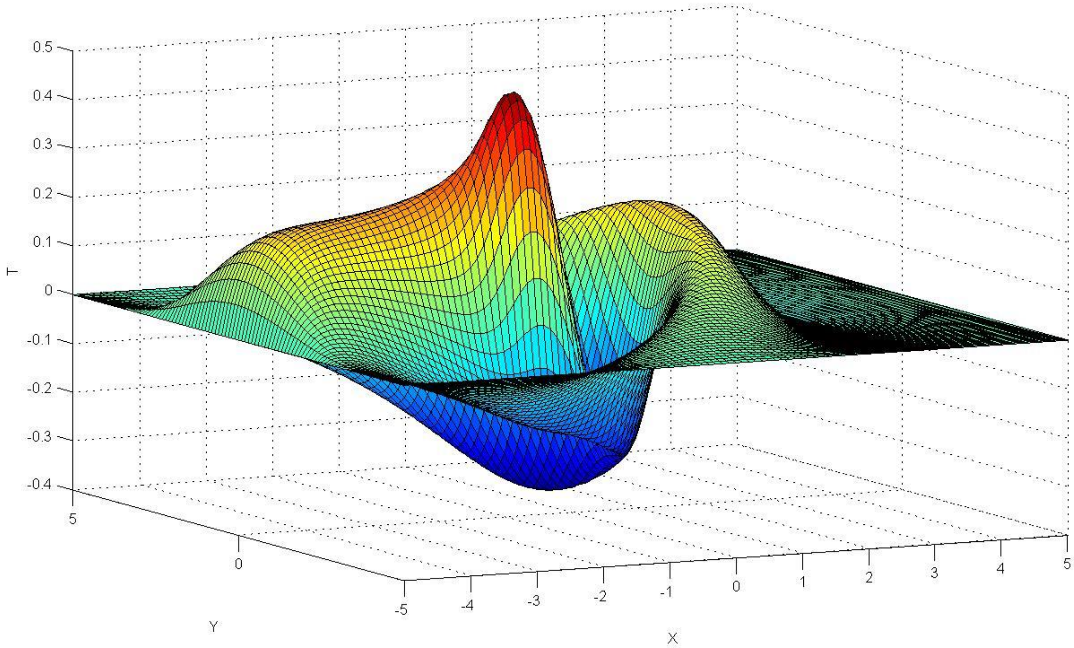
a1	a2	alfa	beta	gama	sigma	V	T
5	5	1	1	1	0.5	0	5



3)

a1	a2	alfa	beta	gama	sigma	V	T

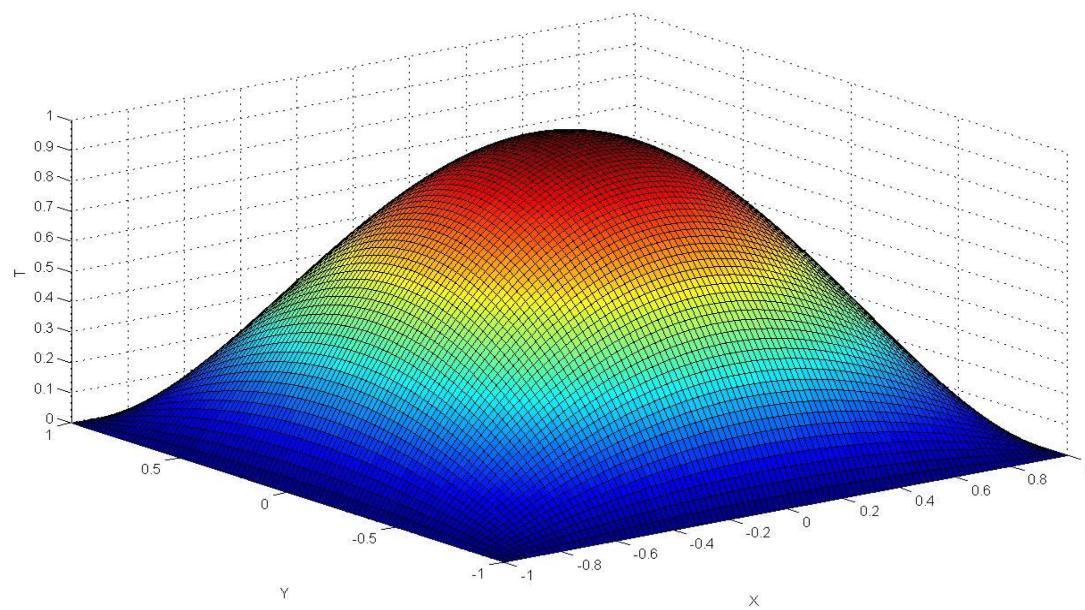
5	**5**	**1**	**1**	**1**	**0.5**	**0**	**10**



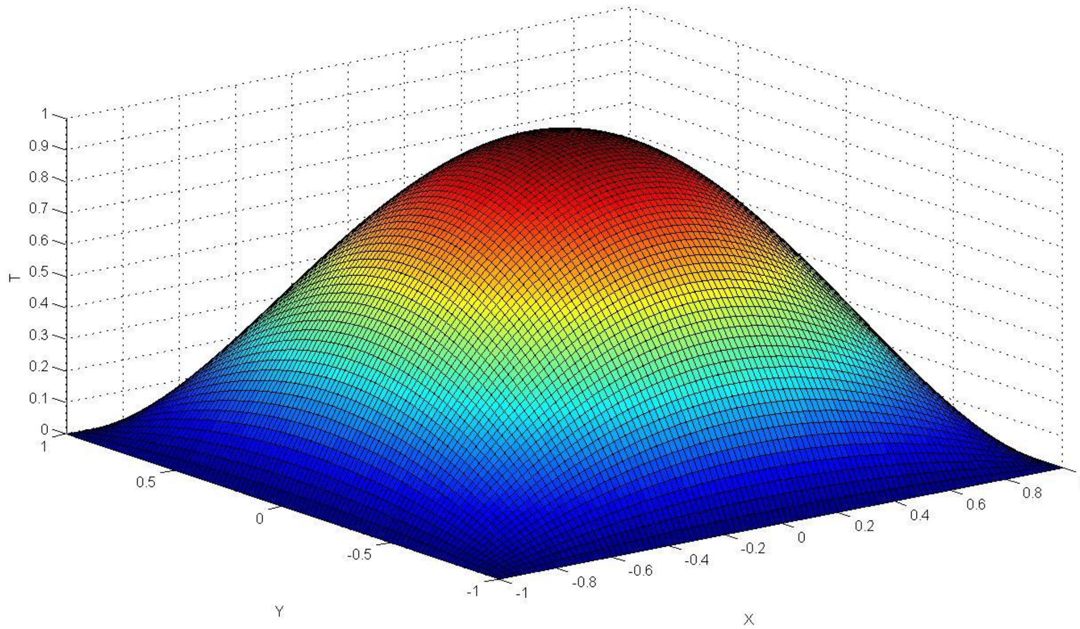
ტესტური ამოცანა: $\psi(x,y,t)=t(1-x^2)(1-y^2)$ $\Omega =]-1;1[x]-1;1[$

1) მეთოდის ამოხსნის შედეგად მიღებული გრაფიკული შედეგი:

a1	a2	alfa	beta	gama	sigma	V	T
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0.5**	**0**	**1**



2) ტესტური ამოცანის ზუსტი გრაფიკული შედეგი:



T
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Y
1
0.5
0
-0.5
-1
X
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. J. Comput. Phys. 1966, **v. 1**, 119.

[2] Benkui T. Nonlinear Rossby waves and their interactions. II: Periodic wave solution and its stability (Chinese. English summary). Acta Sci. Nat. Univ. Pekin, v. **29**, No.3 (1993), 378.

[3] Campbell L.J., Maslowe S.A. A numerical simulation of the nonlinear critical layer evolution of a forced Rossby wave packet in a zonal shear flow. J. Math. Comput. Simul, v. **55**, No.4-6 (2001), 365.

[4] J. G. Charney, Geophys. Publ. 17 (1948) 3.

[5] ,A.M. Obukhov, Izv. Akad. Nauk SSSR, Geograf, Geofiz. 13 (1949) 281

[6] A. Hasagewa, K. Mima, Phys. Fluids 21 (1978) 87

[7] A. Hasagewa, S.G. Maclennan, Y. Kodama, Phys. Fluids 22 (1979) 2122

[8] A. Hasagewa, Adv. Phys. 34 (1985) 1

[9] Horton W., Hasegava A. Quasi-two-dimensional dynamics of plasmas and fluids. Chaos, v. **4**, No. 2 (1994), 227.

[10] M.V. Nelzin, G.P. Chernikov , Plasma Phys Rep. 21 (1995) 922

[11] H. Lamb , Hydrodynamics, sixth ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge 1967

[12] T. Kaladze, J. Rogava, L. Tsamalashvili, M. Tsiklauri, Phys. Lett. A 343 (2005) 199-215

[13] M. Makino, T. Kamimura, T. Sato, J. Phys. Soc. Jpn 50 (1981) 954

[14] M. Makino, T. Kamimura, T. Taniuti, J. Phys. Soc. Jpn 50 (1982) 229

[15] V.D. Larichev, G.M. Reznik, Dokl. Akad. Nauk SSSR 299 (1988) 580

[16] L.A. Mikhailovskaya, Sov. J. Plasma Phys. 12 (1986) 769

[17] V.P. Pavlenko, V.B. Taranov, Sov. J. Plasma Phys. 12 (1986) 769

[18] G.G Sutyrin, I.G. Yushina, Dokl. Akad. Nauk SSSR 299 (1988) 580

[19] J. Nycander, G.G. Sutryrin, Dinam. Atmos. Oceans 16 (1992) 473.

[20] W, Horton, A. Hasagewa, Chaos 4 (1994) 227.

[21] N. Iremadze, T. Jangveladze, Dokl. Semin. Inst. Prikl. Mat. I.N. Vekua 22 (1994) 80.

[22] L.J. Campbell, S.A. Maslowe, J. Math. Comput. Simul. 55 (2001) 365.

[23] R.D. Richtmyer, K.W. Morton, Difference Methods for Initial-Value problems. Wiley-Interscience, London 1967.

[24] T. Kaladze, J. Rogava, L. Tsamalashvili, M. Tsiklauri, Phys. Lett. A 328 (2004) 51.

[25] V.D. Larichev, G.M. Reznik, Dokl Akad. Nauk SSSR 231 (1976) 1077.

[26] A.L. Berestov, Fiz, Atmos, Okeana 15 (1979) 648

[27] S.V. Antipov, M.V. Nezlin, V.K. Rodionov, A. Yu. Rylov, E.N. Snezhkin, A.S. Trubnikov, A.V.Khutoretskii, Sov. J. Plasma Phys. 14 (1988) 648.

[28] M.V. Nezlin, A.Yu Rylov, A.S. Trubnikov, A>V> Khutoretskii, Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. 52 (1990) 211.

Smith L.Y., Leslie M. Stability of Rossby waves in the β-plane approximation. Phys. D, v. **179** No. 1-2 (2003), 53.

Sutyrin G. G., Yushina I. G., Dokl. Akad. Nauk SSSR 299 (1988) 580.

[29] T.D. Kaladze, G.D. Aburjania, O.A. Kharshiladze, W. Horton, Y.-H. Kim, J. Geophys. Res. 109 (2004) A05302