გეომეტრიული აგების სამი კლასიკური პრობლემის ამოუხსნადობა

ზოგადი თეორია

მოხსენება ეხება აგების გეომეტრიული ამოცანებში აბსტრაქტული ალგებრის მეთოდების გამოყენებებს. ჩვენ განვიხილავთ აგების ისეთ ამოცანებს, რომლებშიც ფარგლისა და სახაზავის გამოყენების შემდეგი წესებია დაცული:

სიბრტყეზე თავდაპირველად მოცემულია მხოლოდ ორი O და A საწყისი წერტილი, რომლებსაც **საბაზისო** წერტილები ეწოდება. ამ წერტილების საშუალებით ახალი წერტილის აგება ხდება მხოლოდ და მხოლოდ შემდეგი ორი წესის გამოყენებით:

წესები:

1) სახაზავით (რომელსაც დანაყოფები არ გააჩნია) შესაძლებელია მხოლოდ საბაზისო და მათი საშუალებით ამ წესების გამოყენებით უკვე აგებულ ორ წერტილზე წრფის გავლება. ასეთ წრფეს **აგებადი წრფე** ეწოდება.
2) ფარგლით შესაძლებელია მხოლოდ ისეთი წრეწირის აგება, რომლის ცენტრიც საბაზისო ან უკვე აგებული რაიმე წერტილია და რომელიც გადის ასევე საბაზისო ან უკვე მოცემულ სხვა წერტილზე. ასეთ წრეწირს **აგებადი წრეწირი** ეწოდება.

ამბობენ, რომ წერტილი არის **აგებადი**, თუ იგი წარმოადგენს

- ორი აგებადი წრფის,
- აგებადი წრფისა და აგებადი წრეწირის, ან
- ორი აგებადი წრეწირის

გადაკვეთის წერტილს. სხვა სიტყვებით, ეს შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

განსაზღვრება : სიბრტყეზე მდებარე P წერტილს ეწოდება **აგებადი**, თუ არსებობს წერტილების ისეთი მიმდევრობა

$$P_0 = A, P_1 = B, P_2 , \dots , P_n = P,$$

რომ ყოველი P_i $(2 \leq i \leq n)$ წარმოადგენს ან ორი წრფის, ან ორი წრეწირის, ან წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილს, რომელთაგან თითოეული აგებულია მხოლოდ $P_0, P_1, \dots , P_{i-1}$ წერტილებზე ზემოთ მოყვანილი ორი წესის გამოყენებით.

ვიგულისხმოთ, რომ ელემენტი (წერტილი, წრფე, წრეწირი) ცნობილია თუ ის წინასწარ იყო მოცემული ან ზემოხსენებული მოქმედებების საშუალებით ავაგეთ.

ამოცანის თეორიული ანალიზის ჩატარებისთვის შეგვიძლია განსახილველი ფიგურა ავაგოთ რაიმე x, y საკოორდინატო სისტემაში. მაშინ მოცემული ელემენტები გამოისახება წერტილების ან მონაკვეთების სახით x, y სიბრტყეში. თუ რაიმე მონაკვეთი წინსწარაა მოცემული, ჩვენ ის შეგვიძლია განვიხილოთ ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთად, რითაც ფიქსირდება $x = 1, y = 0$ წერტილი.

დავუშვათ, რომ წინასწარ დაფიქსირებული გვაქვს ეს მონაკვეთი. მაშინ სახაზავისა და ფარგლის გამოყენებით, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ყველა რიცხვი, რომელიც მიიღება ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთზე რაციონალური მოქმედებებით (დამატება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა).

<u>**განსაზღვრება**</u>: ნებისმიერ რიცხვთა სიმრავლეს (ანუ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს), რომელიც ჩაკეტილია ოთხი ალგებრული ოპერაციის (მიმატება, გამოკლება, გამრავლება და რარნულოვან რიცხვზე გაყოფა) მიმართ <u>*რიცხვითი ველი*</u> ეწოდება.

როგორც ვნახეთ, ნებისმიერი რიცხვითი ველი მოიცავს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, ანუ არ არსებობს ისეთი რიცხვითი ველი, რომლის ქვესიმრავლეც არ არის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე

ერთეულოვანი სიგრძიდან ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ რაციონალურ რიცხვთა ველის ყველა ელემენტი, თუმცა ფარგლის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია გავცდეთ რაციონალურ რიცხვთა ველს და ავაგოთ ირაციონალური რიცხვები, მაგალითად $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$-ით და რაციონალური ოპერაციებით კი მივიღებთ ყველა $a + b\sqrt{2}$ სახის რიცხვს, სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ $a + b\sqrt{2}$ სახის რიცხვების სიმრავლე რიცხვითი ველია, ანუ:

ორი $a + b\sqrt{2}$ სახის რიცხვის ჯამი ისევ ასეთი სახისაა, ასევეა გამოკლების, გამრავლების და გაყოფის შემთხვევაში, რაც იმას ნიშნავს რომ ჩვენ მივიღეთ ახალი რიცხვთა ველი, რომელიც მოიცავს რაციონალურ რიცხვებს და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღვნიშნოთ F_0 - ით, ხოლო $a + b\sqrt{2}$ სახის რიცხვებით მისი გაფართოება კი F_1 -ით.

ამის შემდეგ ჩვენ კიდევ შეგვიძლია გავაფართოვოთ ჩვენი კონსტრუქცია მაგალითად F_1 -ის რომელიმე ელემენტიდან ფესვის ამოღებით.

მაგალითად, ავიღოთ რიცხვი $k = 1 + \sqrt{2}$ და ამოვიღოთ ამ რიცხვიდან კვადრატული ფესვი. მივიღებთ ახალ რიცხვს $\sqrt{1+\sqrt{2}} = \sqrt{k}$, რომლის აგებაც შესაძლებელია. ეს რიცხვი კი თავის მხრივ წარმოქმნის $p + q\sqrt{k}$ სახის რიცხვებისგან შემდგარ ველს, სადაც p, q და k რიცხვები F_1 ველის ელემენტებია.

ახლა დავუშვათ, რომ ვიცით რაიმე რიცხვითი ველის ყოველი რიცხვის აგება (ანუ ამ რიცხვის ტოლი სიგრძის მონაკვეთის აგება). *დავრწმუნდეთ, რომ მხოლოდ სახაზავის გამოყენებით F რიცხვითი ველიდან ვერ გავალთ.* მართლაც, წრფე რომელიც გადის ორ წერტილზე კოორდინატებით (a_1, b_1) და (a_2, b_2), სადაც a_1, b_1, a_2 და b_2 რიცხვები F ველის ელემენტებია, ჩაიწერება ტოლობით: $(b_2 - b_1)x + (a_2 - a_1)y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$.

ამ განტოლების კოეფიციენტები რაციონალურადაა დაკავშირებული F ველის რიცხვებთან და, მაშასადამე, თავადაც F ველს მიეკუთვნებიან. თუ გვაქვს ორი წრფე $ax + by - c = 0$ და $a'x + b'y - c' = 0$ რომელთა კოეფიციენტები F ველის ელემენტებია, მაშინ მათი გადაკვეთის წერტილიც, რომლის კოორდინატებია

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

ასევე იქნებიან F -ის ელემენტები. დასკვნა: მხოლოდ სახაზავის გამოყენებით ახალი წერტილების აგებით F ველიდან ვერ გავალთ.

რაც შეეხება, ფარგალს, მისი გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია გავცდეთ F-ის საზღვრებს (ანუ გამოვიდეთ F სიმრავლიდან). ამისთვის უნდა ავირჩიოთ რაიმე k რიცხვი F-დან ისეთი, რომ $\sqrt{k} \notin F$. რიცხვი $\sqrt{k}$ შეგვიძლია ავაგოთ ფარგლის საშუალებით, ისევე როგორც

$$a + b\sqrt{k}$$

სახის ყველა რიცხვი, სადაც a და b კოეფიციენტები F-ის ელემენტებია. ორი ასეთი $a + b\sqrt{k}$ და $c + d\sqrt{k}$ რიცხვის ჯამი $(a + c) + (b + d)\sqrt{k}$, სხვაობა $(a - c) + (b - d)\sqrt{k}$, ნამრავლი $(a + b\sqrt{k})(c + d\sqrt{k}) = (ac + kbd) + (ad + bc)\sqrt{k}$ და შეფარდება $\frac{a+b\sqrt{k}}{c+d\sqrt{k}}$ $= \frac{(a+b\sqrt{k})(c-d\sqrt{k})}{c^2-kd^2} = \frac{ac-kbd}{c^2-kd^2} + \frac{(bc-ad)\sqrt{k}}{c^2-kd^2}$ აგრეთვე არიან $p + q\sqrt{k}$ სახის რიცხვი, სადაც p და q ეკუთვნის F ველს. $c^2 - kd^2$ მნიშვნელი ნული არ გახდება, რადგანაც c და d ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის (c და d ერთდროულად ნულის ტოლია, მაშინ $c + d\sqrt{k} = 0$), ხოლო $\sqrt{k} \neq \frac{c}{d}$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\sqrt{k}$ იქნებოდა F-ის ელემენტი. ამრიგად $a + b\sqrt{k}$ სახის რიცხვთა სიმრავლე ქმნის ახალ F' რიცხვით ველს. F' ველი

მოიცავს F ველის ყველა ელემენტს: თუ b-ს ავიღებთ ნულს მივიღებთ F-ის ელემენტებს.

ჩვენ დავრწმუნდით, რომ თუ რაიმე F რიცვითი ველიდან ყველა რიცხვის აგება შესაძლებელია, ავარჩევთ ამ ველის ნებისმიერ k რიცხვს და ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით ავაგებთ $\sqrt{k}$ რიცხვს, მაშასადამე ავაგებთ $a + b\sqrt{k}$ სახის ყველა რიცხვს სადაც $(a, b) \in F$.

ახლა ვაჩვენოთ პირიქით, თუ ფარგლით მხოლოდ ერთ ოპერაციას შევასრულებთ რაიმე F რიცხვით ველში, მაშინ მხოლოდ იგივე სახის რიცხვები მიიღება. მართლაც, ფარგლის ერთხელ გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ერთ-ერთი: ან წრეწირის წრფესთან გადაკვეთის წერტილი, ან ორი წრეწირის გადაკვეთის წერტილი (ერთიც და მეორეც გადაკვეთის წერტილის კოორდინატების აგების ტოლფასია).

r რადიუსიანი წრეწირი, ცენტრით (p, q) წერტილში, ჩაიწერება განტოლებით $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, თუ m, n და r ეკუთვნიან F ველს, მაშინ $x^2 + y^2 + 2mx + 2nx + l = 0$ წრეწირის განტოლების კოეფიცინეტები აგრეთვე F ველს ეკუთვნიან.

F ველიდან აღებულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის $ax + by + c = 0$ განტოლების კოეფიციენტებიც ამავე ველში ექნება. ამ ორი განტოლებიდან y უცნობის გამორიცხვით წრეწირის წრფესთან გადაკვეთის წერტილის x კოორდინატისთვის ვღებულობთ

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

კვადრატულ განტოლებას, სადაც A, B და C კოეფიციენტები აღებულია F ველიდან

$A = a^2 + b^2$, $B = 2(ac + b^2m - abn)$ და $C = c^2 - 2bcn + b^2l$

განტოლების ამონახსნია

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

რომელსაც $p + q\sqrt{k}$ სახე აქვს, სადაც p, q და k ეკუთვნის F ველს. ასეთივე გამოსახულებას მივიღებთ y კოორდინატისთვის.

როდესაც ლაპარაკია ორ წრეწირზე, მაშინ

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2nx + l = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2m'x + 2n'x + l' = 0$$

განტოლებების ერთმანეთისგან გამოკლებით ვღებულობთ

$$2(m - m')x + 2(n - n') + (l - l') = 0$$

განტოლებას, რომელიც შეიძლება ამოიხსნას ერთ-ერთი წრეწირის განტოლებასთან ერთად.

ორივე შემთხვევაში აგება გვაძლევს ერთი ან ორი ახალი წერტილის კოორდინატებს და ამ ახალ სიდიდეებს აქვთ $p + q\sqrt{k}$ სახე, სადაც p, q და k ეკუთვნის F ველს.

ერთხელ კიდევ მოვახდინოთ შეჯამება: რაიმე აღებული სიდიდეებიდან (მონაკვეთებიდან ან რიცხვებიდან) მხოლოდ ფარგლითა და სახაზავით ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ F ველის ყველა სიდიდე, რომლებიც მოცემული სიდიდეებიდან მიიღებიან რაციონალური ოპერაციების საშუალებით ისე, რომ F რიცხვითი ველის საზღვრებიდან არ გამოვიდეთ. ფარგლის გამოყენებით ჩვენ ვაფართოვებთ იმ სიდიდეთა ველს, რომელთა აგება შესაძლებელია და ვღებულობთ ახალ F' ველს. ეს ახალი ველი შედგება $a + b\sqrt{k}$ სახის რიცხვებისგან, სადაც $a,\ b,\ k$ ეკუთვნიან F ველს. F ველი არის F' ველის ქვეველი. დავრწმუნდით, რომ გეომეტრიული აგების ყოველი ეტაპის შემდეგ (ზემოთხსენებული მოქმედებების) ან ისეთ სიდიდეებს მივიღებთ რომლებიც თავდაპირველად აღებულ ველს ეკუთვნიან, ანდა კვადრატული ფესვის აგებით მივიღებთ ახალ ველს.

ახლა უკვე შესაძლებლობა გვაქვს ზუსტად დავახასიათოთ ყველა იმ სიდიდეთა ერთობლიობა, რომლებიც მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით აიგება. ვიწყებთ წინასწარ მოცემული რაიმე F_0 ველიდან, შემდეგ ვაგებთ ახალ F_1 რიცხვით ველს F_0-თვის $\sqrt{k_0}$-ის მიერთებით (ანუ$a_0 + b_0\sqrt{k_0}$ სახის რიცხვების განხილვით, სადაც k_0, a_0, b_0 ეკუთვნის F_0 ველს, ხოლო $\sqrt{k_0} \notin F_0$). შემდეგ $\sqrt{k_1}$-ის მიერთებით (სადაც k_1 ეკუთვნის F_1 ველს, ხოლო $\sqrt{k_1}$ კი - არა) მიიღება $a_1 + b_1\sqrt{k_1}$ სახის რიცხვების ახალი F_2 რიცხვითი ველი, სადაც a_1, b_1 ეკუთვნის F_1 ველს. ამ პროცედურის გამეორებით n ნაბიჯის შემდეგ მივალთ გარკვეულ F_n რიცხვით ველთან.

ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ის და მხოლოდ ის რიცხვები აიგება, რომლებიც რაციონალური რიცხვების ველის სასრული რაოდენობის ზემოთ აღწერილი გაფართოების შედეგად მიღებულ F_n რიცხვით ველში შედის.

<u>სამი კლასიკური პრობლემის ამოუხსნადობა - კუბის გაორკეცება</u>

ზემოთ მიღებული შედეგის გამოყენებით მტკიცდება ძალიან ცნობილი სამი კლასიკური ამოცანის - მხოლოდ სახაზავისა და ფარგლის გამოყენებით კუბის გაორკეცება, კუთხის სამ ტოლ ნაწილად გაყოფა და წრის ტოლდიდი კვადრატის აგება - ამოუხსნადობა. ჩვენ აქ განვიხილავთ მხოლოდ პირველ მათგანს.

<u>კუბის გაორკეცება</u> ეს ამოცანა მდგომარეობს მხოლოდ სახაზავისა და ფარგლის გამოყენებით მოცუმულ კუბზე ორჯერ მეტი მოცულობის კუბის აგებაში. ზოგადობის შეუღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულ კუბს ერთის ტოლი სიგრძის წიბო აქვს. მაშინ იმ კუბის ასაგებად, რომლის მოცულობა ორჯერ უნდა აღემატებოდეს მოცემულისას, საჭიროა ავაგოთ ისეთი x სიგრძის მონაკვეთი (საძიებელი კუბის წიბო), რომელიც აკმაყოფილებს

$$x^3 - 2 = 0$$

კუბურ განტოლებას. ახლა დავამტკიცოთ, რომ მარტო ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ასეთი x რიცხვის აგება შეუძლებელია.

დამტკიცება

დავუშვათ, რომ ასეთი x რიცხვის აგება შესაძლებელია. მაშინ ზემოთ მიღებული შედეგების თანახმად, ეს რიცხვი უნდა ეკუთვნოდეს რაიმე F_k ველს (k რაღაც ნატურალური რიცხვია). ახლა დავრწმუნდეთ რომ ასეთი დაშვება წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანს.

უკვე ვიცით რომ x რიცხვი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს რაციონალურ რიცხვთა F_0 ველს, რადგანაც $\sqrt[3]{2}$ არის ირაციონალური რიცხვი. ამიტომ x ეკუთვნის ერთ-ერთ გაფართოებულ F_k ველს, სადაც k მთელი დადებითი რიცხვია. ცხადია, შეგვიძლია დავუშვათ რომ k არის ასეთ რიცხვებს შორის უმცირესი, ე.ი $x \in F_k$ ველს და არ ეკუთვნის F_{k-1} ველს. ეს ნიშნავს რომ x -ს აქვს სახე

$$x = p + q\sqrt{w}\ ,$$

სადაც p, q და w ეკუთვნიან F_{k-1} ველს, მაგრამ $\sqrt{\mathrm{w}}$ არ ეკუთვნის ამ ველს. ამის შემდეგ საკმაოდ მარტივ ალგებრულ მსჯელობაზე დაყრდნობით დავრწმუნდებით, რომ თუ

$p+q\sqrt{w}$ არის $x^3-2=0$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ $p-q\sqrt{w}$ რიცხვიც აგრეთვე მისი ამონახსნი იქნება. რადგანაც $x \in F_k$ ველს, ამიტომ x^3 და x^3-2 აგრეთვე ეკუთვნის F_k ველს, ანუ

$$x^3-2=a+b\sqrt{w}$$

სადაც a და b აღებული არიან F_{k-1} ველიდან. მოცემული ორი განტოლებიდან ვიღებთ

$$a=p^3+3pq^2w-2,\ b=3p^2q+q^3w.$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$y=p-q\sqrt{w}\,,$$

მაშინ დავინახვთ, რომ

$$y^3-2=a-b\sqrt{w}$$

რადგან x არის $x^3-2=0$ განტოლების ფესვი. ამიტომ

$$a+b\sqrt{w}=0$$

მაგრამ უკანასკნელი ტოლობიდან ჩანს რომ a-ც და b-ც ორივე ნულის ტოლია. მართლაც თუ b განსხვავებული იქნებდა ნულისგან, მაშინ მივიღებდით ტოლობას $\sqrt{w}=-\frac{a}{b}$. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას რომ $\sqrt{w}$ არ ეკუთვნის F_{k-1} ველს. ამრიგად $b=0$, მაშინ $a=0$

რადგანაც დავადგინეთ რომ $a=b=0$, მაშინ $y^3-2=a-b\sqrt{w}$ ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს რომ $y=p-q\sqrt{w}$ არის $x^3-2=0$ განტოლების ამონახსნი. ვაჩვენოთ რომ $y \neq x$, ე.ი $x-y \neq 0$, რადგანაც $x-y=2q\sqrt{w}$ რიცხვი ნულის ტოლი მხოლოდ მაშინ იქნებოდა, როცა $q=0$, ხოლო ამ შემთხვევაში $x=p$ მიეკუთვნება F_{k-1} ველს, რაც ჩვენი დაშვების ეწინააღმდეგება.

ამრიგად ჩვენ დავადგინეთ, რომ თუ $x=p+q\sqrt{w}$ არის $x^3-2=0$ კუბური განტოლების ფესვი, მაშინ $y=p-q\sqrt{w}$ არის იმავე განტოლების x-გან განსხვავებული მეორე ფესვი, რასაც მივყავართ წინააღმდეგობამდე: ცხადია $y=p-q\sqrt{w}$ ნამდვილი რიცხვია, მაგრამ $x^3-2=0$ განტოლებას კი მხოლოდ ერთი ნამდვილი და ორი კომპლექსური ფესვი აქვს.

ჩვენმა დაშვებამ მიგვიყვანა წინააღმდეგობადე და, მაშასადამე, $x^3-2=0$ განტოლების ფესვი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს რომელიმე F_k ველს. ამრიგად, კუბის გაორმაგება მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით შეუძლებელია.