ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

დირაკის განტოლება დაბალგანზომილებიანი სისტემებისათვის

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის

ფიზიკის მიმართულების სტუდენტის

ირაკლი სიხარულიძის
საბაკალავრო ნაშრომი

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, მერაბ ელიაშვილი

თბილისი, 2019 წელი

სარჩევი

ანოტაცია

მოცემული ნაშრომის მიზანია იმ თავისებურებების განხილვა, რომლებიც თავს იჩენს დაბალგანზომილებიანი სისტემებისათვის დირაკის განტოლების შესწავლისას. დასაწყისში განხილულია დირაკის განტოლების ზოგადი თვისებები უწყვეტ და დისკრეტულ გარდაქმნებებთან მიმართებაში. უწყვეტი გარდაქმნების შესწავლასთან დაკავშირებით, მოკლედ არის განხილული ლორენცის ჯგუფის ძირითადი ალგებრული და ტოპოლოგიური სტრუქტურა, რის შემდეგაც ნაჩვენებია, თუ როგორ გარდაიქმნება დირაკის ბისპინორი მუხტის შეუღლების, სივრცის ინვერსიისა და დროის შებრუნების დისკრეტული გარდაქმნების დროს (3+1) განზომილებიანი მინკოვსკის სივრცის შემთხვევაში. ამის შემდეგ იგივე დისკრეტული გარდაქმნები განიხილება (2+1) და (1+1) განზომილებიანი შემთხვევებისთვის. (2+1) განზომილებაში დისკრეტული გარდაქმნების სათანადოდ განსაზღვრისათვის შემოტანილია დამატებითი თავისუფლების ხარისხი.

Annotation

The aim of the present work is to consider the peculiarities that arise when studying the Dirac equation for low dimensional systems. In the beginning general properties of the Dirac equation are reviewed with relation to continuous and discrete transformations. Afterwards, in connection to the study of continuous transformations, comes a brief review of the basic algebraic and topological structure of the Lorenz group, after which it is shown how the Dirac bispinor behaves under charge conjugation, space inversion and time reversal discrete transformations in the (3+1) dimensional Minkowski space. Then the same discrete transformations are considered in the (2+1) and (1+1) dimensional cases. In order to properly define these discrete transformations in the (2+1) dimensional case, a new degree of freedom is introduced.

შესავალი

თუ კანონები, რომლებიც ამყარებს კავშირს სიდიდეებს შორის, რომლებიც ახასიათებს მოცემულ ფიზიკურ სისტემას, ან განსაზღვრავს ამ სიდიდეთა ცვლილებას დროში, არ იცვლება გარკვეული გარდაქმნების მიმართ, რომლებიც ხორციელდება სისტემაზე, მაშინ ამბობენ, რომ ამ კანონებს გააჩნიათ სიმეტრია (ან ისინი არიან ინვარიანტულნი) მოცემული გარდაქმნების მიმართ. სიმეტრიის გარდაქმნები ქმნიან ჯგუფს.

ასეთი კანონის მაგალითს წარმოადგენს დირაკის განტოლება, რომელიც შეიძლება იყოს სიმეტრიული როგორც უწყვეტი, ისე დისკრეტული გარდაქმნების მიმართ. დირაკის განტოლების სიმეტრიები მოიცავს გარდაქმნებს, რომლებშიც ასახულია მინკოვსკის სივრცის თვისებები. მინკოვსკის სივრცის იზომეტრიები ქმნიან პუანკარეს ჯგუფს, რომელიც ასევე ცნობილია არაერთგვაროვანი ლორენცის ჯგუფის სახელწოდებით. ამ გარდაქმნებთან დაკავშირებული სიმეტრიები გვხდება რელატივისტური სისტემების არაკვანტური აღწერის დროსაც. მეორე მხრივ, დირაკის განტოლება ასევე სიმეტრიულია გარდაქმნების მიმართ, რომლებსაც ვხვდებით მხოლოდ რელატივისტური სისტემის კვანტურ-მექანიკური აღწერის დროს.

მინკოვსკის სივრცის იზომეტრიათა ჯგუფში გამოიყოფა ლორენცის გარდაქმნათა ქვეჯგუფი, რომელიც ასევე ცნობილია ერთგვაროვანი ლორენცის ჯგუფის სახელწოდებით. იგი წარმოადგენს უწყვეტ, ანუ ტოპოლოგიურ, ჯგუფს. როგორც ტოპოლოგიური სივრცე, ის წარმოადგენს 6 განზომილებიან არაკომპაქტურ გლუვ მრავალსახეობას (ლორენცის ჯგუფი ლის ჯგუფია), რომელიც არ არის ბმული. ლორენცის ჯგუფი შედგება 4 ბმული კომპონენტისაგან, რომელთაგან კომპონენტი, რომელიც შეიცავს იგივურ გარდაქმნას, თვითონ წარმოადგენს ჯგუფს, რომელსაც საკუთრივი ორთოქრონული ლორენცის ჯგუფი ეწოდება. ის წარმოადგენს ლორენცის ჯგუფის ნორმალურ ქვეჯგუფს. ამ ჯგუფის წარმოდგენები შეიძლება მიღებულ იქნას ლორენცის ჯგუფის ლის ალგებრის წარმოდგენებიდან. სპინორები, რომლებიც გვხვდება დირაკის თეორიაში, შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ლორენცის ჯგუფის სპინორული წარმოდგენის შესაბამისი წარმოდგენის სივრცის ელემენტები. დირაკის განტოლება სიმეტრიულია ლორენცის ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ (ლორენც-კოვარიანტულობა), რის შესაბამისადაც ის აკმაყოფილებს რელატივისტური თეორიის მოთხოვნილებებს.

დირაკის განტოლება, როგორც აღვნიშნეთ, ასევე ხასიათდება დისკრეტული სიმეტრიებით, რომლეთაგანაც მოცემულ ნაშრომში განხილულია მუხტური შეუღლების, სივრცის ინვერსიისა და დროის შებრუნების გარდაქმნები. მუხტური შეუღლება ამყარებს კავშირს უარყოფითი ენერგიის ელექტრონსა და დადებითი ენერგიის მქონე პოზიტრონს შორის. დროის შებრუნების მიმართ ინვარიანტულობა (T-ინვარიანტულობა) ნიშნავს, რომ სისტემის ნებისმიერ დინამიკასთან (ევოლუციასთან) ერთად შეიძლება განხორციელდეს დროში შებრუნებული დინამიკა (ევოლუცია), როდესაც სისტემა თანმიმდევრულად გადის საპირისპირო მიმართულებით მდგომარეობებს, რომლებიც სიმეტრიულია მდგომარეობებისა, რომლებსაც სისტემა გადის „პირდაპირი" მიმართულებით. ასეთი დროით სიმეტრიული მდგომარეობები გამოირჩევა იმპულსისა და სპინის პროექციის შებრუნებული მიმართულებებით. სივრცის ინვერსიის მიმართ დირაკის განტოლების ინვარიანტულობა ნიშნავს, რომ ბუნებაში დირაკის განტოლებით აღწერილი ყოველი პროცესისათვის იმავე ალბათობით ხორციელდება „სარკულად სიმეტრიული" პროცესი.

დირაკის განტოლება შეიძლება განვიხილოთ ასევე სისტემებისთვისაც, რომლებიც არსებობს 3-ისაგან განსხვავებული განზომილებათა რიცხვის მქონე სივრცეებში. მაგალითად,

2 განზომილებიანი დირაკის თეორია წარმოადგენს ელექტრონის ყოფაქცევის მოდელს გრაფენში. დირაკის სპინორის კომპონენტთა რიცხვს გარკვეულ პირობას ადებს დირაკის განტოლებაში შემავალი კოეფიციენტების ანტიკომუტაციური თანაფარდობები, სახელდობრ, ეს რიცხვი აუცილებლად უნდა იყოს ლუწი. ამ ნაშრომში განხილულია დირაკის თეორია (2+1) და (1+1) განზომილებებში. (2+1) განზომილებიან შემთხვევაში სპინორის კომპონენტთა მინიმალური რიცხვია 2. ასეთი შემთხვევისათვის ზოგიერთი დისკრეტული სიმეტრია შეიძლება არაწინააღმდეგობრივად განისაზღვროს მხოლოდ უმასო ზღვარში. ამ გარემოების თავის ასარიდებლად შემოაქვთ ახალი თავისუფლების ხარისხი დირაკის ფერმიონისასთვის, რაც ასახვას პოულობს იმაში, რომ, ნაცვლად 2 კომპონენტიანი სპინორისა, განიხილება 4 კომპონენტიანი სპინორი. დაბალგანზომილებიანი სისტემებისათვის სიმეტრიის გარდაქმნების თვისებებში აისახება ასეთი სისტემების რიგი ფიზიკური თავისებურებებისა. მაგალითად, (1+1) განზომილებიან თეორიაში დროის შებრუნების ანტიუნიტარული ოპერატორის კვადრატის იგივეობასთან ტოლობა წარმოადგენს იმ გარემოების ასახვას, რომ (1+1) განზომილებაში დირაკის ნაწილაკი უსპინო ობიექტია.

თავი I. დირაკის განტოლება

§1. დირაკის განტოლება

დირაკის განტოლება მიღებულ იქნა კლაინ-გორდონის განტოლების ფაქტორიზაციის გზით, მასთან დაკავშირებული რიგი პრობლემების, მაგალითად, უარყოფითი ალბათობის სიმკვრივის, გადასაჭრელად, რის შედეგადაც მიღებულ იქნა შემდეგი ფორმის ტალღური განტოლება:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\frac{\hbar c}{i}\alpha^k\partial_k+\beta mc^2\right)\psi\equiv H\psi \tag{I.1}$$

სივრცითი კომპონენტები აღნიშნულია ლათინური ინდექსებით, სადაც ორჯერ განმეორებული ინდექსებით აჯამვაა ნაგულისხმევი. მეორე რიგის წარმოებულს $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ კლაინ-გორდონის განტოლებაში მივყავართ უარყოფით ალბათობის სიმკვრივემდე $\rho=\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$. ამის თავის ასარიდებლად დიფერენციალურ განტოლებას მოეთხოვება იყოს დროით პირველი რიგის. რელატივისტური კოვარიანტულობის მოთხოვნილებიდან გამომდინარე იმავე რიგის უნდა იყოს სივრცითი წარმოებულებიც. კოეფიციენტები მოცემულ განტოლებაში ჩვეულებრივი რიცხვები ვერ იქნება: წინააღმდეგ შემთხვევაში განტოლების ფორმა არ იქნებოდა ინვარიანტული სივრცითი მობრუნებების მიმართ. იმისათვის, რომ H იყოს ერმიტული, α^k და β უნდა იყოს ერმიტული მატრიცები. მაშასადამე, α^k და β არის $N\times N$ მატრიცები, ხოლო ψ კი -

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_N\end{pmatrix}$$

N კომპონენტიანი სვეტია. დირაკის განტოლების ტალღული ფუნქციები ახდენენ ლორენცის ჯგუფის სპინორული წარმოდგენის რეალიზებას; მათ სპინორები ეწოდებათ. დირაკის განტოლებას შემდეგი პირობები ედება:

(I) ψ-ის თვითოეული კომპონენტი უნდა აკმაყოფილებდეს კლაინ-გორდონის განტოლებას, იმისათვის, რომ ბრტყელი ტალღებისათვის სრულდებოდეს რელატივისტური მიმართება ენერგიასა და იმპულსს შორის: $E^2=p^2c^2+m^2c^4$.

(II) უნდა არსებობდეს შენახვადი ოთხ-დენი, რომლის ნულოვანი კომპონენტი იქნება დადებითი ალბათობის სიმკვრივე.

(III) განტოლება უნდა იყოს ლორენც კოვარიანტული, ანუ მას უნდა ჰქონდეს ერთნაერი ფორმა ყველა ათვლის სისტემაში, რომლებიც დაკავშირებულია ერთმანეთთან პუანკარეს გარდაქმნებით.

განვიხილოთ მოცემული მოთხოვნების შედეგები. H-ის ორჯერადი გამოყენება მოგვცემს:

$$\begin{aligned}-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}&=\left(\frac{\hbar c}{i}\alpha^k\partial_k+\beta mc^2\right)^2\psi\\ &=-\hbar^2c^2\sum_{ij}\frac{1}{2}\left(\alpha^i\alpha^j+\alpha^j\alpha^i\right)\partial_i\partial_j\psi+\frac{\hbar mc^3}{i}\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha^i\beta+\beta\alpha^i\right)\partial_i\psi\\ &\quad+\beta^2m^2c^4\psi\end{aligned} \tag{I.2}$$

სადაც განტოლების მარჯვენა მხარის პირველი წევრის სიმეტრიზაციისათვის გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ გაწარმოების ოპერატორები ერთმანეთთან კომუტირებენ $\partial_i\partial_j=\partial_j\partial_i$. კლაინ-

გორდონის განტოლებასთან $\left(\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi = 0$ შედარებას მივყავართ შემდეგ პირობებამდე დირაკის განტოლებაში შემავალი კოეფიციენტებისათვის:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbb{1} \tag{I.3}$$

$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \tag{I.4}$$

$$\left(\alpha^i\right)^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \tag{I.5}$$

§2. უწყვეტობის განტოლება

ψ-ის ერმიტულად შეუღლებული სტრიქონი განიმარტება შემდეგნაირად:

$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \cdots, \psi_N^*)$.

დირაკის განტოლების გამრავლება მარჯვნიდან $\psi^\dagger$-ზე მოგვცემს:

$$i\hbar\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\psi^\dagger\alpha^i\partial_i\psi + mc^2\psi^\dagger\beta\psi \tag{I.6}$$

მოცემული განტოლების ერმიტულად შეუღლების შედეგად მივიღებთ:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar c}{i}\left(\partial_i\psi^\dagger\right)\alpha^{i\dagger}\psi + mc^2\psi^\dagger\beta^\dagger\psi \tag{I.7}$$

ბოლო ორი განტოლების სხვაობა მოგვცემს:

$$-i\hbar\left(\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi\right) = -\frac{\hbar c}{i}\left(\left(\partial_i\psi^\dagger\right)\alpha^{i\dagger}\psi + \psi^\dagger\alpha^i\partial_i\psi\right) + mc^2\left(\psi^\dagger\beta^\dagger\psi - \psi^\dagger\beta\psi\right)$$

$\frac{i}{\hbar}$-ზე გამრავლება მოგვცემს:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger\psi\right) = -c\left(\left(\partial_i\psi^\dagger\right)\alpha^{i\dagger}\psi + \psi^\dagger\alpha^i\partial_i\psi\right) + \frac{imc^2}{\hbar}\left(\psi^\dagger\beta^\dagger\psi - \psi^\dagger\beta\psi\right) \tag{I.8}$$

იმისათვის, რომ ამ განტოლებამ მიიღოს უწყვეტობის განტოლების სახე, α და β მატრიცები უნდა იყოს ერმიტული:

$\alpha^{i\dagger} = \alpha^i, \quad \beta^\dagger = \beta$

მაშინ შემდეგნაირად განსაზღვრული სიმკვრივე და დენის სიმკვრივე:

$\rho \equiv \psi^\dagger\psi = \sum_{\mu=1}^N \psi_\mu^*\psi_\mu\,,\ j^k \equiv c\psi^+\alpha^k\psi$

აკმაყოფილებს უწყვეტობის განტოლებას:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\boldsymbol{j} = 0 \tag{I.9}$$

j^μ-ს ნულოვანი კომპონენტით $j^0 \equiv c\rho$ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ოთხ-დენის სიმკვრივე:

$$j^\mu \equiv \left(j^0, j^k\right) \tag{I.10}$$

და უწყვეტობის განტოლება დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}j^0 + \frac{\partial}{\partial x^k}j^k = 0 \tag{I.11}$$

§3. დირაკის მატრიცების თვისებები

$\left(\alpha^i\right)^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$-დან გამომდინარეობს რომ მოცემულ მატრიცათა საკუთარი მნიშვნელობებია ±1.

$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0$-დან $\alpha^i = -\beta\alpha^i\beta$ და კვალის ფუნქციის არგუმენტთა ციკლური

გადასმების მიმართ ინვარიანტობის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\mathrm{Tr}(\alpha^i) = -\mathrm{Tr}(\beta\alpha^i\beta) = -\mathrm{Tr}(\alpha^i\beta^2) = -\mathrm{Tr}(\alpha^i)$$

ანალოგიურად β-სთვისაც, საიდანაც გამომდინარეობს:

$$\mathrm{Tr}(\alpha^i) = \mathrm{Tr}(\beta) = 0 \tag{I.12}$$

მსგავსების გარდაქმნის მეშვეობით მოცემული მატრიცები შეგვიძლია მივიყვანოთ დიაგონალურ სახემდე, სადაც დიაგონალზე იქნება საკუთარი მნიშვნელობები, ანუ ±1; კვალის ნულთან ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ დადებით და უარყოფით საკუთარ მნიშვნელობათა რიცხვი ტოლია, საიდანაც ვასკვნით, რომ N ლუწია. (3+1) განზომილებიან მინკოვსკის სივრცეში $N = 4$ წარმოადგენს უმცირეს განზომილებას, რომელშიც შესაძლებელია (3-4) ალგებრული სტრუქტურის რეალიზება. $N = 2$ არ არის საკმარისი, ვინაიდან 2×2 წრფივად დამოუკიდებელი მატრიცები $\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ შეიცავს მხოლოდ 3 ურთიერთანტიკომუტირებად მატრიცას.

მოცემულ მატრიცათა ერთ-ერთი კერძო წარმოდგენაა:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{I.13}$$

სადაც მოცემული 4×4 მატრიცები აგებულია ორგანზომილებიანი ერთეულოვანი მატრიცისა და პაულის მატრიცებისაგან:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{I.14}$$

დირაკის განტოლებას, მატრიცათა მოცემულ წარმოდგენასთან ერთად, ეწოდება დირაკის განტოლების სტანდარტული წარმოდგენა.

§4. დირაკის განტოლება კოვარიანტული ფორმით

იმისათვის, რომ დროითა და სივრცით წარმოებულები გამრავლებული იყოს მსგავსი ალგებრული თვისებების მქონე მატრიცებზე, გავამრავლოთ (1) გატოლება $\frac{\beta}{c}$-ზე:

$$-i\hbar\beta\partial_0\psi - i\hbar\beta\alpha^i\partial_i\psi + mc\psi = 0 \tag{I.15}$$

განვსაზღვროთ ახალი დირაკის მატრიცები:

$$\gamma^0 \equiv \beta, \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha^i \tag{I.16}$$

რომელთაც გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

γ^0ერმიტულია და$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$, ხოლო γ^i კი - ანტიერმიტული:

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha^i\beta = -\beta\alpha^i = -\gamma^i$$

ასევე:

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \beta\beta\alpha^i + \beta\alpha^i\beta = \beta\beta\alpha^i - \beta\beta\alpha^i = 0$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \beta\alpha^i\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta\alpha^i = -\beta^2(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i) = -(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i) = 0, \text{როცა } i \neq j$$

რასაც მივყავართ დირაკის მატრიცების შემდეგ ალგებრულ სტრუქტურამდე:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \equiv \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \tag{I.17}$$

ანუ ისინი წარმოადგენს კლიფორდის ალგებრის გენერატორებს. დირაკის განტოლება იღებს შემდეგ სახეს:

$$\left(-\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{I.18}$$

თუ მოცემულ 4 γ^μ ჰიპერკომპლექსურ რიცხვს დავუმატებთ მათ ყოველგვარ შესაძლო ნამრავლებს (მრავალჯერადი ნამრავლების ჩათვლით) და ამ გზით მიღებულ ჰიპერკომპლექსურ რიცხვთა ყველა წრფივ კომბინაციას ყველა შესაძლო კომპლექსური კოეფიციენტებით, ჩვენ მივიღებთ ელემენტთა სიმრავლეს, რომელზეც განსაზღვრულია ელემენტების შეკრებისა და ერთმანეთზე გამრავლების ოპერაციები, ასევე ელემენტების კომპლექსურ რიცხვებზე გამრავლება. ჩვენ ვღებულობთ *ალგებრას* კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ.

დირაკის მატრიცების ძირითადი განმსაზღვრელი თანაფარდობა (17) წარმოადგენს ინვარიანტს მსგავსების გარდაქმნის მიმართ: $\gamma^\mu \to O\gamma^\mu O^{-1}$, სადაც O ნებისმიერი გადაუგვარებელი მატრიცაა. სტანდარტულ წარმოდგენაში დირაკის მატრიცებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{I.19}$$

§5. ელექტრომაგნიტურ ველთან დაწყვილება

იმპულსის ოპერატორს კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ ფორმებში აქვს შემდეგი სახე:

$$p_\mu = i\hbar\,\partial_\mu, \qquad p^\mu = i\hbar\,\partial^\mu \tag{I.20}$$

სადაც, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ და $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$. დროითი და სივრცითი კომპონენტებისათვის:

$$p^k = p_k = i\hbar\frac{\partial}{\partial ct}, \qquad p^k = -p_k = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{I.21}$$

ელექტრომაგტირუ ველთან დაწყვილება მიიღწევა შემდეგი ჩანაცვლებით:

$$p_\mu \to p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu \tag{I.22}$$

სადაც $A^\mu = (\varphi, \boldsymbol{A})$ ოთხ-პოტენციალია. (22) ჩასმა დირაკის გნატოლებაში გვაძლევს:

$$\left(-\gamma^\mu\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) + mc\right)\psi = 0 \tag{I.23}$$

რაც წარმოადგენს დირაკის განტოლებას რელატივისტურად კოვარიანტული ფორმით ელექტრომაგნიტური ველის არსებობისას.

(22) ჩანაცვლების შედეგს წარმოადგენს (23) განტოლების ინვარიანტობა პირველი გვარის ყალიბრული გარდაქმნების მიმართ:

$$\psi(x) \to e^{-i\frac{e}{\hbar c}\alpha(x)}\psi(x), \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$$

თავი II. უწყვეტი გარდაქმნები

§1. ლორენცის ჯგუფი

სივრცე-დროში არაევკლიდური მეტრიკის გამო საჭიროა განვასხვავოთ ოთხ-ვექტორის კონტრავარიანტული (ზედა ინდექსი) და კოვარიანტული (ქვედა ინდექსი) კოორდინატები. ბაზისად გამოვიყენოთ 4 წირფივად დამოუკიდებელი ოთხ-ვექტორი $\{e_\mu\}$,

სადაც $\mu = 0, 1, 2, 3 = t, x, y, z$ (ბერძნული ინდექსები ღებულობს 4 მნიშვნელობას, ლათინურები კი - 3 სივრცით მნიშვნელობას). განვსაზღვროთ A ოთხ-ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები:

$$A = A^\mu e_\mu \tag{II.1}$$

სადაც ნაგულისხმევია ქვედა და ზედა განმეორებული ინდექსებით აჯამვა. გვაქვს $A^\mu = \left(A^0, A^i\right) = A^0, \boldsymbol{A}$). ორი ოთხ-ვექტორის სკალარული ნამრავლი ($\cdot$) განიმარტება შემდეგნაირად: $A \cdot B = A^\mu B^\nu e_\mu e_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}$, სადაც $g_{\mu\nu} \equiv e_\mu \cdot e_\nu$ განსაზღვრავს მეტრიკულ ტენზორს, რომელიც სიმეტრიულია $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. ის წარმოდგენილია შემდეგი მატრიცით:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{II.2}$$

ის აღწერს ბრტყელ სივრცე-დროს და დამოკიდებულია შეთანხმებაზე (შეგვეძლო აგვერჩია $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$). კოვარიანტული კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A_\mu \equiv A \cdot e_\mu = A^\nu e_\nu \cdot e_\mu = A^\nu g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} A^\nu \tag{II.3}$$

$g^{\mu\nu}$ განისაზღვრება როგორც $g_{\mu\nu}$-ს შებრუნებული, ანუ $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g^\mu{}_\sigma = \delta^\mu_\sigma = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ და იგი წარმოდგენილია იმავე (2) მატრიცით. $g^{\mu\nu}$ და $g_{\mu\nu}$ ტენზორები გამოიყენება ინდექსების დასაწევად და ასაწევად. მეტრიკულ ტენზორს ერთნაირი გამოსახულება აქვს სხვადასხვა საკოორდინატო სისტემებში, ის ინვარიანტული ტენზორია.

განვსაზღვროთ ასევე დიფერენციალური ოპერატორები:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\right) = (\partial_t, \boldsymbol{\nabla}) = (\partial_0, \partial_i) \tag{II.4}$$

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\partial^0, \partial^i\right) = (\partial_t, -\boldsymbol{\nabla}) \tag{II.5}$$

სივრცე-დროში მანძილი (ინტერვალი) ორ წერტილს შორის (რომლებსაც მოვლენები ეწოდება) ds ისეთია, რომ:

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = dx \cdot dx = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} \tag{II.6}$$

პუანკარეს გარდაქმნები წარმოადგენს სივრცე-დროის (მინკოვსკის სივრცის) იზომეტრიებს, ანუ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც ინარჩუნებს მანძილს. შესაბამისად, ისინი გარდაქმნის ds-ს ds'-ად, ისე რომ ${ds'}^2 = ds^2$, ანუ $g_{\mu\nu} d{x'}^\mu d{x'}^\nu = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. $d{x'}^\mu = \frac{\partial {x'}^\mu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma = \partial_\sigma {x'}^\mu dx^\sigma$-ს გამოყენებით, მივიღებთ $g_{\mu\nu} \partial_\sigma {x'}^\mu \partial_\rho {x'}^\nu = g_{\sigma\rho}$. ავიღოთ მოცემული გამოსახულების დეტერმინანტი $\det\left(g_{\mu\nu} \partial_\sigma {x'}^\mu \partial_\rho {x'}^\nu\right) = \det\left(g_{\mu\nu}\right) \det\left(\partial_\sigma {x'}^\mu\right) \det\left(\partial_\rho {x'}^\nu\right) = \det\left(g_{\mu\nu}\right) \det^2\left(\partial_\sigma {x'}^\mu\right) = \det\left(g_{\sigma\rho}\right)$, საიდანაც ვასკვნით, რომ იაკობიანი $\left|\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right| = 1$, ასე რომ მატრიცა $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$ შებრუნებადია. კიდევ გაწარმოებით მივიღებთ$\partial_\alpha\left(g_{\mu\nu} \partial_\sigma {x'}^\mu \partial_\rho {x'}^\nu\right) = \partial_\alpha\left(g_{\sigma\rho}\right) = 0$, საიდანაც

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 {x'}^\mu}{\partial x^\alpha x^\sigma} \frac{\partial {x'}^\nu}{\partial x^\rho} + g_{\mu\nu} \frac{\partial {x'}^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 {x'}^\nu}{\partial x^\alpha x^\rho} = 0$$

განვსაზღვროთ $A_{\alpha\sigma\rho} \equiv g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 {x'}^\mu}{\partial x^\alpha x^\sigma} \frac{\partial {x'}^\nu}{\partial x^\rho}$. გვექნება შემდეგი თანაფარდობები: $A_{\alpha\sigma\rho} + A_{\alpha\rho\sigma} = 0$, $A_{\sigma\alpha\rho} + A_{\alpha\rho\sigma} = 0$, $A_{\sigma\alpha\rho} + A_{\sigma\rho\alpha} = 0$ და $A_{\sigma\rho\alpha} + A_{\alpha\rho\sigma} = 0$... საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $\frac{\partial^2 {x'}^\mu}{\partial x^\alpha x^\sigma} = 0$, ასე რომ x' წარმოადგენს x-ის წრფივ ფუნქციას. ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$${x'}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{II.7}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$-ში, შეთანხმებით, μ სტრიქონის ინდექსია, ხოლო ν კი – სვეტის.

მუდმივი წანაცვლების ვექტორი a შეესაბამება სივრცე-დროის ტრანსლაციას, Λ კი – სივრცე-დროის მობრუნებას (ანუ ან სივრცის მობრუნებას, ან ინერციული ათვლის სისტემის შეცვლას, რომელსაც ლორენცის ბუსტი ეწოდება). (Λ, a) წარმოადგენს პუანკარეს ჯგუფის ელემენტს (ტრანსლაციები + მობრუნებები + ბუსტები), მაშინ როცა Λ არის ლორენცის ჯგუფის ელემენტი (მობრუნებები + ბუსტები).

ლორენცის ჯგუფის ელემენტი Λ მოქმედებს შემდეგნაირად $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$. $x' \cdot x' = x \cdot x$-დან ვღებულობთ, რომ:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} x^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}$$

საიდანაც:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = (\Lambda^{T})_{\alpha}{}^{\mu} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \qquad \text{(II.8)}$$

სადაც გამოყენებულ იქნა ტრანსპონირებული მატრიცის განმარტება $(\Lambda^{T})_{\mu}{}^{\nu} \equiv \Lambda^{\nu}{}_{\mu}$. მაშასადამე:

$$g = \Lambda^{T} g \Lambda \qquad \text{(II.9)}$$

სადაც g წარმოადგენს $g_{\mu\nu}$ მატრიცას, ხოლო Λ კი – $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ მატრიცას. (9) თანაფარდობა განსაზღვრავს (ერთგვაროვან) ლორენცის გარდაქმნებს.

ლორენცის გარდაქმნები ქმნიან ჯგუფს, რომელსაც ეწოდება $O(3,1)$. ის წარმოადგენს ლის ჯგუფს, ანუ მას გარდა ალგებრული სტრუქტურისა (ჯგუფი), გააჩნია ასევე ტოპოლოგიური სტრუქტურაც: ის წარმოადგენს გლუვ მრავალსახეობას. როგორც მრავალსახეობა ის შედგება 4 ბმული კომპონენტისგან. (9) განმსაზღვრელი თანაფარდობიდან გვაქვს:

$$\Lambda^{0}{}_{\mu} g^{\mu\nu} \Lambda^{0}{}_{\nu} = g^{00} = 1 = (\Lambda^{0}{}_{0})^{2} - \sum_{k=1}^{3} \left(\Lambda^{0}{}_{k}\right)^{2} = 1$$

საიდანაც:

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^{2} \geq 1, \text{ანუ } \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1 \quad \text{ან} \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq 1 \qquad \text{(II.10)}$$

ასევე $\det(g) = \det(\Lambda^{T} g \Lambda) = \det(\Lambda^{T}) \det(g) \det(\Lambda) = \det(g) \det^{2}(\Lambda)$, საიდანაც $\det(\Lambda) = \pm 1$. Λ-ს დეტერმინანტისა და $\Lambda^{0}{}_{0}$ ნიშანი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ლორენცის ჯგუფის ელემენტების კლასიფიკაციისათვის. სივრცითი არეკვლა $P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, დროის შებრუნება $T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ მათი კომპოზიცია $PT = -\mathbb{1}$ წარმოადგენს დისკრეტულ გარდაქმნებს, რომლებიც არ არის უწყვეტად დაკავშირებული ჯგუფის ერთეულთან (ნეიტრალურ ელემენტთან). P და T გარდაქმნები ცვლის სივრცე-დროის ორიენტაციას, რაც გამოიხატება იმაში, რომ $\det T = -1$ და $\det P = -1$. მათ არასაკუთრივი გარდაქმნები ეწოდებათ. $SO(3,1)$ ეწოდება საკუთრივ ლორენცის ჯგუფს: ის წარმოადგენს ლორენცის ჯგუფის ქვეჯგუფს, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ისეთ ელემენტებს, რომლებიც არ ცვლის სივრცე-დროის ორიენტაციას (მაშასადამე, გამოირიცხება P და T, მაგრამ არა PT, რამდენადაც $\det PT = 1$). თუმცა PT ინარჩუნებს სივრცე-დროის ორიენტაციას, ის უცვლის დროს მიმართულებას. გარდაქმნები, რომელთათვისაც $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$, არ ცვლიან დროის მიმართულებას და მათ ორთოქრონული გარდაქმნები ეწოდება, ხოლო გარდაქმნები, რომელთათვისაც $\Lambda^{0}{}_{0} \leq 1$, ცვლიან დროის მიმართულებას და მათ არაორთოქრონული გარდაქმნები ეწოდებათ. P არასაკუთრივი და ორთოქრონულია, T არასაკუთრივი და არაორთოქრონულია, ხოლო PT კი – საკუთრივი და არაორთოქრონული. $SO^{+}(3,1)$ ეწოდება საკუთრივ ორთოქრონულ ლორენცის ჯგუფს. ის წარმოადგენს $O(3,1)$-ის ქვეჯგუფს, რომელიც უწყვეტად არის

დაკავშირებული ჯგუფის ერთეულთან. $O(3,1)$-ის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება წარმოდგენის იქნას, როგორც $SO^+(3,1)$-ის ელემენტის ნამრავლი $\mathbb{1}$, P, T ან PT-ზე.

§2. ლორენცის ალგებრა.

4×4 ნამდვილის მატრიცებს გააჩნია 16 ნამდვილი პარამეტრი, მაგრამ განმსაზღვრელი თანაფარდობა $g=\Lambda^T g\Lambda$ გვაძლევს 10 დამოუკიდებელ შეზღუდვას, რაც ტოვებს 6 დამოუკიდებელ პარამეტრს, ანუ ლორენცის ჯგუფს გააჩნია 6 გენერატორი.

ავაგოთ კონკრეტული ლორენცის გარდაქმნა გენერატორებისა და მათი ალგებრის მისაღებად. 6 დამოუკიდებელი გარდაქმნიდან გვაქვს 3 სივრცითი მობრუნებება xy, xz და yz სიბრტყეებში და 3 ბუსტი (ინერციული ათვლის სისტემის შეცვლა) tx, ty და tz სიბრტყეებში. განვიხილოთ ბუსტი tx სიბრტყეში. იგი წარმოადგენს ისეთ $x'=\Lambda x$ გარდაქმნას, რომ $y'=y,\ z'=z$ და მხოლოდ t-სა და x-ის შერევა ხდება. ასევე ვიცით, რომ ეს გარდაქმნა წარმოადგენს იზომეტრიას, ასე რომ $t'^2-x'^2=t^2-x^2$. ასევე $\det(\Lambda)=1$ (საკუთრივი) და ${\Lambda^0}_0\geq 1$ (ორთოქრონული). ${x'}^\mu={\Lambda^\mu}_\nu x^\nu$-ს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix}t'\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0\\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{II.11}$$

მოცემული გარდაქმნა პარამეტრიზებულია ერთადერთი სიდიდით ϕ, რომელსაც ეწოდება სისწრაფე. მნიშვნელოვანია, რომ $\phi\in\mathbb{R}$ შემოუსაზღვრელია და არ არის ჩაკეტილი. მაშასადამე, ლორენცის ჯგუფი არაკომპაქტურია.

შეგვიძლია მივიღოთ მოცემული ბუსტის გენერატორი K_x შემდეგნაირად:

$$K_x\equiv -i\frac{d\Lambda}{d\phi}|_{\phi=0}=\begin{pmatrix}0 & i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{II.12}$$

რომელიც ანტიერმიტულია ${K_x}^\dagger=-K_x$. მსგავსად ბუსტებისთვის y და z მიმართულებით მივიღებთ:

$$K_y=\begin{pmatrix}0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad K_z=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{II.13}$$

სივრცითი მობრუნებების გენერატორებისთვის კი გვაქვს შემდეგი გამოსახულებები:

$$J_x=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & i & 0\end{pmatrix},\qquad J_y=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad J_z=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{II.14}$$

გვაქვს ${K_i}^\dagger=-K_i$ და ${J_i}^\dagger=J_i$, ანუ J_i ერმიტულებია. ლორეცნის ჯგუფის პარამეტრთა სივრცე შედგება 3 სისწრაფისა და 3 კუთხისაგან: $(\phi_x,\phi_y,\phi_z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)\in\mathbb{R}^3\times[0,\pi]^3$ ($\times$-ით აღნიშნულია სიმრავლეთა დეკართული ნამრავლი). პარამეტრთა სივრცე არაკომპაქტურია: ის შემოუსაზღვრელია და არ არის ჩაკეტილი).

ლორენცის ჯგუფის ლის ალგებრა $so(3,1)$ შეიძლება მიღებულ იქნას გენერატორების კომუტატორების დათვლით. გვაქვს $[J_x,J_y]=iJ_z$, $[J_x,K_y]=iK_z$ და $[K_x,K_y]=-iJ_z$. მაშასადამე ლოროენცის ალგებრისათვის გვაქვს:

$$[J^i,J^j]=i\epsilon^{ijk}J^k,\qquad [J^i,K^j]=i\epsilon^{ijk}K^k,\qquad [K^i,K^j]=-i\epsilon^{ijk}J^k \tag{II.15}$$

პირველი ტოლობა ნიშნავს, რომ სივრცითი მობრუნებები ქმნის ჩაკეტილ ქვეალგებრას $so(3)$. მეორე ტოლობა ნიშნავს, რომ ტრიპლეტი (K_x, K_y, K_z) გარდაიქმნება როგორც ვექტორი. ასევე პირველი ტოლობის თანახმად ტრიპლეტი (J_x, J_y, J_z) გარდაიქმნება როგორც ვექტორი. მესამე ტოლობის თანახმად, ბუსტები არ ქმნიან ჩაკეტილ ქვეალგებრას.

უსასრულოდ მცირე ლორენცის გარდაქმნისათვის $(\vec{\phi} \to 0, \vec{\theta} \to 0)$ შესაბამისად გვექნება $\Lambda = \mathbb{1} + i\vec{\phi} \cdot \vec{K} + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}$.

$\lim\limits_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x$-ის გამოყენებით სასრული გარდაქმნისათვის $\Lambda\ (\vec{\phi}, \vec{\theta})$-თი შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: დავშალოთ მოცემული გარდაქმნა N ნაბიჯად და დავწეროთ

$$\Lambda = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{i\vec{\phi} \cdot \vec{K}}{N} + \frac{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}{N}\right)^N = \exp\left(i\vec{\phi} \cdot \vec{K} + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}\right) \equiv e^{\left(i\vec{\phi}\cdot\vec{K} + i\vec{\theta}\cdot\vec{J}\right)} \qquad \text{(II.16)}$$

თუმცა უნდა ითქვას, რომ არაკომპაქტური ჯგუფისათვის, რომელსაც წარმოადგენს ლორენცის ჯგუფი, გენერატორების ექსპონირებით ჩვენ ვერ აღვადგენთ ჯგუფის ყველა ელემენტს. შეიძლება მოხდეს, რომ ჯგუფის ყველა ელემენტის აღდგენა შესაძლებელი იყოს ამგვარი ექსპონენტების ნამრავლით.

§3. ლორენცის ჯგუფის წარმოდგენები

ლორენცის ჯგუფის წარმოდგენის მისაღებად ავაგოთ მისი ლის ალგებრის წარმოდგენა. განვსაზღვროთ $\vec{N}_\pm \equiv \frac{(\vec{J} \pm i\vec{K})}{2}$, რომელიც ერმიტულია $\vec{N}_\pm^\dagger = \vec{N}_\pm$. ლორენცის ჯგუფის ლის ალგებრისათვის გვექნება:

$$\left[N_+^i, N_+^j\right] = i\epsilon^{ijk} N_+^k, \qquad \left[N_-^i, N_-^j\right] = i\epsilon^{ijk} N_-^k, \qquad \left[N_+^i, N_-^j\right] = 0 \qquad \text{(II.17)}$$

რაც ნიშნავს, რომ ეს ალგებრა იყოფა ორ $su(2)$ ალგებრად, ანუ $so(3{,}1) = su(2) \oplus su(2)$. მაშასადამე, $so(3{,}1)$-ის დაუყვანადი წარმოდგენები შეიძლება მიღებულ იქნას როგორც $su(2) \oplus su(2)$-ის დაუყვანადი წარმოდგენები, რომლებიც აღინიშნება $(j_+,\ j_-)$, სადაც $j_\pm = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ და რომელთა განზომილებაცაა $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$. $\vec{N}_-^2$ და $\vec{N}_+^2$ წარმოადგენს კაზიმირის ოპერატორებს, ანუ ისინი ყოველ დაუყვანად წარმოდგენაში პროპორციულია ერთეულის. $(j_+,\ j_-)$-ში $\vec{N}_+^2 = j_+(j_+ + 1)\mathbb{1}$ და $\vec{N}_-^2 = j_-(j_- + 1)\mathbb{1}$. განსაზღვრის თანახმად გვაქვს: $\vec{J} = \vec{N}_+ + \vec{N}_-$ და $\vec{K} = -i\left(\vec{N}_+ - \vec{N}_-\right)$. სივრცითი მობრუნების გენერატორი $\vec{J}$ ამგვარად წარმოადგენს ორი კუთხური მომენტის $\vec{N}_+$ და $\vec{N}_-$ ჯამს. კუთხურ მომენტთა კომპოზიციის წესის თანახმად, $\vec{J}^2$-ის შესაბამისი სპინი j ღებულობს მნიშვნელობებს ერთის ბიჯით $|j_+ - j_-|$-დან $|j_+ + j_-|$-მდე.

ლორენცის ჯგუფის ფუნდამენტური წარმოდგენაა $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. ის ოთხგანზომილებიანია და წარმოადგენს 4-ვექტორულ წარმოდგენას. A 4-ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები A^μ გარდაიქმნება შემდეგნაირად: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$.

$(\boldsymbol{j_+},\ \boldsymbol{j_-}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$. ეს წარმოდგენა არის 4-სკალური წარმოდგენა, მისი განზომილებაა 1, $\vec{J} = 0, \vec{K} = 0$.

$(\boldsymbol{j_+},\ \boldsymbol{j_-}) = (\boldsymbol{\frac{1}{2}}, \boldsymbol{0})$. ამ წარმოდგენის განზობილებაა 2 და მისი ელემენტები იქცევა როგორც სპინორები სივრცითი მობრუნებების მიმართ, რამდენადაც $j = \frac{1}{2}$. $\vec{N}_+ = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ და $\vec{N}_- = 0$. შესაბამისად $\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ და $\vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2}$. მაშასადამე $\Lambda_L = e^{\left(i\vec{\phi}\cdot\vec{K} + i\vec{\theta}\cdot\vec{J}\right)} = e^{\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\left(i\vec{\theta} + \vec{\phi}\right)}$. მოცემული წარმოდგენის ელემენტები არიან კომპლექსურ რიცხვთა დუბლეტები ψ_L, რომლეთაც მარცხენა ვეილის სპინორები ეწოდება, და რომელთა გარდაქმნის კანონიცაა: $\psi_L' = \Lambda_L \psi_L$.

$(\boldsymbol{j}_+, \boldsymbol{j}_-) = (\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}})$. ამ წარმოდგენის განზომილებაა 2 და მისი ელემენტები ასევე წარმოადგენენ სპინორებს, რამდენადაც $j = \frac{1}{2}$. $\vec{N}_+ = 0$ და $\vec{N}_- = \frac{\vec{\sigma}}{2}$, ასე რომ $\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ და $\vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}$. შესაბამისად, $\Lambda_R = e^{(i\vec{\phi}\cdot\vec{K}+i\vec{\theta}\cdot\vec{J})} = e^{\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(i\vec{\theta}-\vec{\phi})}$. მოცემული წარმოდგენის ელემენტებს ψ_R ეწოდებათ მარჯვენა ვეილის სპინორები. მათი გარდაქმნის კანონია $\psi'_R = \Lambda_R\psi_R$. მარჯვენა და მარცხენა სპინორება ორთავე იქცევა როგორც სპინორი სივრცითი მობრუნებების მიმართ, მაგრამ ისინი განსხვავებულად იქცევა ბუსტების მიმართ. ეს ორი წარმოდგენა არ არის ერთმანეთის ექვივალენტური, რამდენადაც არ არსებობს ისეთი მატრიცა S (მსგავსების გარდაქმნის მატრიცა), რომ $\Lambda_R = S\Lambda_L S^{-1}$, რაც წარმოდგენათა ექვივალენტობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს.

Λ_R და Λ_L არ ეკუთვნის $SO(3,1)$-ს, რამდენადაც ისინი არ არის უნიტარული: $\Lambda_L^\dagger\Lambda_L = e^{\vec{\sigma}\cdot\vec{\phi}} \neq 1$. ეს არაუნიტარულობა გამოწვეულია იმით, რომ $SO(3,1)$ არაკომპაქტურია. Λ_R და Λ_L ეკუთვნის ჯგუფს $SL(2,\mathbb{C})$ (სპეციალური წრფივი ჯგუფი კომპლექსური 2×2 მატრიცებისა), რომელიც წარმოადგეს $SO(3,1)$ ჯგუფის დაფარვას, რაც აღინიშნება შემდეგნაირად: $SL(2,\mathbb{C}) = \overline{SO(3,1)}$. ვეილის სპინორები ახდენენ $SO(3,1)$ ჯგუფის პროექტიული წარმოდგენის რეალიზებას.

წარმოდგენა $\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{0}\right) \oplus \left(\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)$. P სივრცითი არეკვლისას $\vec{J} \to \vec{J}$, რამდენადაც ის ფსევდოვექტორია, ხოლო $\vec{K} \to -\vec{K}$, რადგანაც ის ნამდვილი ვექტორია. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $PJ^iP = J^i$, ხოლო $PK^iP = K^i$. მაშასადამე სივრცითი არეკვლისას $\vec{N}_\pm \to \vec{N}_\mp$, ანუ დაუყვანადი წარმოდგენები $(\frac{1}{2}, 0)$ და $(0, \frac{1}{2})$ ერთმანეთს უცვლის ადგილს, ასე რომ მარცხენა სპინორი ხდება მარჯვენა და პირიქით. შევაერთოთ მარცხენა და მარჯვენა ვეილის სპინორები ოთხეულში $\psi = \begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}$, რომელსაც ბისპინორი, ანდაც დირაკის სპინორი, ეწოდება. მას 4 კომპლექსური კომპონენტი გააჩნია. ბისპინორთა სივრცე არის $SO^+(3,1)$ ჯგუფის ოთხგანზომილებიანი დაყვანადი პროექტიული წარმოდგენის სივრცე. არეკვლის დამატების შემთხვევაში ეს წარმოდგენა დაუყვანადია. დირაკის სპინორი Λ ლორენცის გარდაქმნისას შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$\begin{pmatrix}\psi'_L\\ \psi'_R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Lambda_L & 0\\ 0 & \Lambda_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}$$

რასაც აღვნიშნავთ $\psi' = S(\Lambda)\psi$. არეკვლისას კი:

$$\begin{pmatrix}\psi'_L\\ \psi'_R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ \mathbb{1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}$$

§4. დირაკის განტოლების ლორენც კოვარიანტულობა.

ფარდობითობის პრინციპის თანახმად ბუნების კანონებს აქვთ ერთნაირი სახე სხვადასხვა ინერციულ ათვლის სისტემებში.

განვიხილოთ ორი ინერციული ათვლის სისტემა I და I'. ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია ამ ორ ათვლის სისტემაში შესაბამისად იყოს ψ და ψ'. ამ ორი ათვლის სისტემის დამაკავშირებელი პუანკარეს გარდაქმნა დავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x = \Lambda x + a \qquad \text{(II.18)}$$

ψ-სა და ψ'-ს შორის უნდა არსებობდეს ლოკალური კავშირი:

$$\psi'(x') = F(\psi(x)) = F[\psi(\Lambda^{-1}(x'-a))] \qquad \text{(II.19)}$$

ფარდობითობის ფრინციპიდან და (19) ფუნქციონალური ტანაფარდობიდად გამომდინარეობს დირაკის განტოლების ლორენც კოვარიანტულობა: დირაკის განტოლება I-ში (18) და (19) გარდაქმნების შედეგად გადადის დირაკის განტოლებაში I'-ში, ანუ დირაკის განტოლების ფორმა ინვარიანტულია პუანკარეს გარდაქმნების მიმართ. რადგანაც ორივე ψ და ψ' უნდა აკმაყოფილებდეს წრფივ დირაკის განტოლებას, მათი ფუნქციონალური თანაფარდობა უნდა იყოს წრფივი, ანუ:

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi\big(\Lambda^{-1}(x'-a)\big) \tag{II.20}$$

სადაც $S(\Lambda)$ 4×4 მატრიცაა. კომპონენტებში:

$$\psi'_\alpha(x') = \sum_{\beta=1}^{4} S_{\alpha\beta}\psi_\beta\big(\Lambda^{-1}(x'-a)\big) \tag{II.21}$$

დირაკის განტოლების ლორენც კოვარიანტულობის თანახმად ψ' ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას:

$$\big(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m\big)\psi'(x') = 0, \qquad (c=\hbar=1) \tag{II.22}$$

სადაც $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$.

γ მატრიცები არ იცვლება ლორენცის გარდაქმნებისას. I-ში გვაქვს:

$$\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big)\psi(x) = 0 \tag{II.23}$$

$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu\frac{\partial}{\partial x'^\nu}$ და $S^{-1}\psi'(x') = \psi(x)$ გამოყენებით:

$$\big(i\gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu\partial'_\nu - m\big)S^{-1}\psi'(x') = 0$$

განტოლების ორივე მხარის S-ზე გამრავლება მოგვცემს:

$$iS\Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu S^{-1}\partial'_\nu\psi'(x') - m\psi'(x') = 0 \tag{II.24}$$

(22)-სა და (24)-ის შედარებით ვასკვნით, რომ $S(\Lambda)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu \tag{II.25}$$

თავი III. დისკრეტული გარდაქმნები

§1. მუხტური შეუღლება

ელექტრონის ანტინაწილაკი, პოზიტრონი, ასევე წარმოადგენს ფერმიონს $\frac{1}{2}$ სპინით, ასე რომ მისთვისაც უნდა კმაყოფილდებოდეს დირაკის განტოლება $e\to -e$-თი. ამგვარად, უნდა არსებობდეს გარკვეული კავშირი უარყოფითი მუხტის უარყუფით ენერგიულ ამონახსნებსა და დადებითი მუხტის დადებით ენერგიულ ამონახსნებს შორის.

ელექტრონისათვის გვაქვს:

$$\big(\gamma^\mu\big(i\partial_\mu - eA_\mu\big) - m\big)\psi = 0 \tag{III.1}$$

ხოლო იმავე მასის, მაგრამ შებრუნებული მუხტის მქონდე ნაწილაკისათვის გვექნება:

$$\big(\gamma^\mu\big(i\partial_\mu + eA_\mu\big) - m\big)\psi_c = 0 \tag{III.2}$$

განვსაზღვროთ ოპერატორი K_0, რომელიც აწარმოებს თავისი არგუმენტების კომპლექსურ შეუღლებას:

$$K_0 i\partial_\mu = -i\partial_\mu K_0, \qquad K_0A_\mu = A_\mu K_0 \tag{III.3}$$

რადგანაც ელექტრომაგნიტური ველი ნამდვილია. დირაკის განტოლების კომპლექსურად შეუღლება მოგვცემს:

$$\left((\gamma^\mu)^*\left(-i\partial_\mu - eA_\mu\right) - m\right)\psi^*(x) = \left(-(\gamma^\mu)^*\left(i\partial_\mu + eA_\mu\right) - m\right)\psi^*(x) = 0 \qquad \text{(III.4)}$$

ვეძებოთ გადაუგვარებელი მატრიცა $C\gamma^0$ შემდეგი თვისებით:

$$C\gamma^0(\gamma^\mu)^*(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu \qquad \text{(III.5)}$$

ამ მატრიცის მეშვეობით (4) გარდავქნათ შემდეგნაირად:

$$C\gamma^0\left(-(\gamma^\mu)^*\left(i\partial_\mu + eA_\mu\right) - m\right)(C\gamma^0)^{-1}C\gamma^0\psi^*(x) = \left(\gamma^\mu\left(i\partial_\mu + eA_\mu\right) - m\right)C\gamma^0\psi^*(x) = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

(2)-თან შედარებიდან:

$$\psi_c = C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T \qquad \text{(III.7)}$$

რადგანაც

$$\bar{\psi}^T = \left(\psi^\dagger\gamma^0\right)^T = (\gamma^0)^T\left(\psi^\dagger\right)^T = \gamma^0\psi^* \qquad \text{(III.8)}$$

(5) შეიძლება დაწერილ იქნას შემდეგი ფორმით:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T \qquad \text{(III.9)}$$

სტანდარტულ წარმოდგენაში გვექნება:

$$(\gamma^0)^T = \gamma^0, \qquad (\gamma^1)^T = -\gamma^{-1}, \qquad (\gamma^2)^T = \gamma^2, \qquad (\gamma^3)^T = -\gamma^3$$

ასე რომ, C კომუტირებს γ^1-თან და γ^3-თან და ანტიკომუტირებს γ^0-თან და γ^2-თან. აქედან:

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \qquad \text{(III.10)}$$

ასე რომ:

$$\psi_c = i\gamma^2\psi^* \qquad \text{(III.11)}$$

მუხტური შეუღლების ოპერატორი

$$\mathcal{C} = C\gamma^0K_0 = i\gamma^2K_0 \qquad \text{(III.12)}$$

წარმოადგეს კომპლექსურად შეუღლებისა და $C\gamma^0$-ზე გამრავლების კომპოზიციას.

თუ $\psi(x)$ აღწერს დირაკის ნაწილაკის მოძრაობას მუხტით e ელექტრომაგნიტურ ველში, რომელიც ხასიათდება 4-პოტენციალით $A_\mu(x)$, მაშინ $\psi_c(x)$ აღწერს ნაწილაკს $-e$ მუხტით იმავე ველში.

მაგალითად, თავისუფალი ნაწილაკისათვის ნულოვანი იმპულსით, რომლისთვისაც $A_\mu(x) = 0$:

$$\psi_1^{(-)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}e^{imt} \qquad \text{(III.13)}$$

და შესაბამისად:

$$\left(\psi_1^{(-)}\right)_{\boldsymbol{c}} = \mathcal{C}\psi_1^{(-)} = C\gamma^0\left(\psi_1^{(-)}\right)^* = i\gamma^2\left(\psi_1^{(-)}\right)^* = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt} = \psi_2^{(+)} \qquad \text{(III.14)}$$

მუხტურად შეუღლებულ მდგომარეობას საპირისპირო სპინი აქვს.

§2. სივრცის ინვერსია

სივრცის ინვერსიას შეესაბამება ლორენცის გარდაქმნა:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{III.15}$$

ზოგადი თანაფარდობიდან S-ისთვის:

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\nu}S(\Lambda) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} g^{\mu\nu}\,\gamma^{\nu} = g^{\mu\mu}\gamma^{\mu} \tag{III.16}$$

სადაც μ-თი აჯამვა არ წარმოებს. (16)-ის ამონახსნს წარმოადგენს:

$$S \equiv P = e^{i\varphi}\gamma^{0} \tag{III.17}$$

აქ $e^{i\varphi}$ დაუმზერად ფაზურ მამრავს წარმოადგენს. შესაბამისად ბისპინორი სივრცითი ინვერსიისას გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$\psi'(x') \equiv \psi'(\boldsymbol{r}', t) = \psi'(-\boldsymbol{r}, t) = e^{i\varphi}\gamma^{0}\psi(x) = e^{i\varphi}\gamma^{0}\psi(-\boldsymbol{r}', t) \tag{III.18}$$

მაშასადამე, სივრცითი ინვერსიის გარდაქმნისათვის დირაკის ბისპინორთა ჰილბერტის სივრცეში გვაქვს ოპერატორი:

$$\mathcal{P} = e^{i\varphi}\gamma^{0}\mathcal{P}^{(0)} \tag{III.19}$$

სადაც $\mathcal{P}^{(0)}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(-\boldsymbol{r}, t)$.

§3. დროის შებრუნება

აღვნიშნოთ დროის შებრუნების, ან, უფრო სწორად, მოძრაობის შებრუნების, ოპერატორი $\mathcal{T} = \hat{T}\mathcal{T}_0$, სადაც $\mathcal{T}_0$ ახორციელებს ოპერაციას $t \to -t$, ხოლო $\hat{T}$ კი $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ სპინორს უსაბამებს სხვა $\psi'(\boldsymbol{r}, t)$ სპინორს:

$$\psi'(\boldsymbol{r}, t) = \hat{T}\mathcal{T}_0\psi(\boldsymbol{r}, t) = \hat{T}\psi(\boldsymbol{r}, -t) \tag{III.20}$$

რომელიც ასევე აკმაყოფილებს დირაკის განტოლებას. თუ $-t_1$ მომენტში სპინორი $\psi(\boldsymbol{r}, -t_1)$ სახისაა და, დირაკის განტლების თანახმად, გადადის $\psi(\boldsymbol{r}, t_1)$ სპინორში t_1 მომენტში, მაშინ სპინორი $\psi'(\boldsymbol{r}, -t_1) = \hat{T}\psi(\boldsymbol{r}, t_1)$ გადადის $\psi'(\boldsymbol{r}, t_1) = \hat{T}\psi(\boldsymbol{r}, -t_1)$ იმავე დროში.

$\mathcal{T}_0$-ის მოქმედებით დირაკის განტოლების ორივე მხარეზე:

$$i\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \Big(\boldsymbol{\alpha}\cdot\big(-i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\big) + \beta m + eA_0(\boldsymbol{r}, t)\Big)\psi(\boldsymbol{r}, t) \tag{III.21}$$

მივირებთ:

$$i\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}, -t)}{\partial(-t)} = \Big(\boldsymbol{\alpha}\cdot\big(-i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, -t)\big) + \beta m + eA_0(\boldsymbol{r}, -t)\Big)\psi(\boldsymbol{r}, -t) \tag{III.22}$$

რადგანაც ტალღურ მექანიკაში დროის შებრუნების გარდაქმნის მიღწევა ხდება კომპლექსური შეუღლებით, დავწეროთ $\hat{T} = \hat{T}_0K_0$. ამის გათვალისწინებით:

$$i\frac{\partial\psi'(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \hat{T}\Big(\boldsymbol{\alpha}\cdot\big(-i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, -t)\big) + \beta m + eA_0(\boldsymbol{r}, -t)\Big)\hat{T}^{-1}\psi'(\boldsymbol{r}, t) \tag{III.23}$$

დროის შებრუნების შედეგად მიღებული ვექტორ-პოტენციალი წარმოქნილია დენის სიმკვრივით, რომლის მიმართულებაც შებრუნებულია საწყისი სიმკვრივის. აქედან გამომდინარეობს, რომ ვექტორ-პოტენციალი დროის შებრუნებისას იცვლის ნიშანს, ხოლო 4-პოტენციალის ნულოვანი კომპონენტი კი უცვლელი რჩება:

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, -t), \qquad A'^{0}(\boldsymbol{r}, t) = A^{0}(\boldsymbol{r}, -t) \tag{III.24}$$

შესაბამისად, დირაკის განტოლება $\psi'(\boldsymbol{r}, t)$ სპინორისათვის:

$$i\frac{\partial\psi'(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \Big(\boldsymbol{\alpha}\cdot\big(-i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}, t)\big) + \beta m + eA'_0(\boldsymbol{r}, t)\Big)\psi'(\boldsymbol{r}, t) \tag{III.25}$$

მიიღება, თუ $\hat{T}$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\hat{T}\boldsymbol{\alpha}\hat{T}^{-1} = -\boldsymbol{\alpha}, \qquad \hat{T}\beta\hat{T}^{-1} = \beta \tag{III.26}$$

$\hat{T} = \hat{T}_0 K_0$ გათვალისწინებით ეს პირობები მოგვცემს:

$$\hat{T}_0\boldsymbol{\alpha}^*\hat{T}_0^{-1} = -\boldsymbol{\alpha}, \qquad \hat{T}_0\beta^*\hat{T}_0^{-1} = \beta \tag{III.27}$$

სტანდარტულ წარმოდგენაში, რადგანაც α_1, α_3 და β ნამდვილებია, ხოლო α_2 კი – წარმოსახვითი, გვექნება:

$$\{\hat{T}_0, \alpha_1\} = \{\hat{T}_0, \alpha_3\} = 0 \tag{III.28}$$

$$[\hat{T}_0, \alpha_2] = [\hat{T}_0, \beta] = 0 \tag{III.29}$$

საიდანაც:

$$\hat{T}_0 = -i\alpha_1\alpha_3 \tag{III.30}$$

და, მაშასადამე,

$$\hat{T} = -i\alpha_1\alpha_3 K_0 = i\gamma^1\gamma^3 K_0 \tag{III.31}$$

სრული დროის შებრუნების ოპერატორისათვის გვაქვს:

$$\mathcal{T} = \hat{T}_0 K_0 \mathcal{T}_0 \tag{III.32}$$

და, შესაბამისად:

$$\psi'(\boldsymbol{r}, t) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(\boldsymbol{r}, -t) = i\gamma^1\gamma^3\gamma^0\bar{\psi}^T(\boldsymbol{r}, -t) = i\gamma^2\gamma^5\bar{\psi}^T(\boldsymbol{r}, -t) \tag{III.33}$$

და, როგორც მოითხოვებოდა, $\psi'(\boldsymbol{r}, t)$ სპინორი აკმაყოფილებს დირაკის განტოლებას.

დროის შებრუნების შედეგად მიღებული სპინორის იმპულსი და სპინი ნიშანს იცვლის.

თავი IV. (2+1) განზომილებიანი დირაკის თეორია

§1. (2+1) განზომილებიანი შემთხვევა

დირაკის განტოლება

$$H_D\psi = i\partial_t\psi, \qquad H_D(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m \tag{IV. 1}$$

სახით სამართლიანია ნებისმიერი $d \geq 1$ სივრცითი განზომილებისათვის. $\boldsymbol{p}$ აღნიშნავს იმპულსის ოპერატორს, რომელსაც პოზიციურ (კოორდინატულ) წარმოდგენაში აქვს სახე $\boldsymbol{p} = -i\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}$. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, $\boldsymbol{\alpha}$ მატრიცათა ვექტორისათვის და β მატრიცისათვის სამართლიანია შემდეგი ანტიკომუტაციური თანაფარდობები:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbb{1} \tag{IV. 2}$$

$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \tag{IV. 3}$$

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \tag{IV. 4}$$

თუმცა ამ მატრიცათა სახე დამოკიდებულია განზომილებაზე, ჰამილტოანიანის ზოგადი სტრუქტურა მისგან დამოუკიდებელია.

დირაკის ჰამილტონიანის (1) სპექტრი შედგება დადებითი და უარყოფითი ენერგიის ნაწილებისაგან, რომლებიც მოიცემა შემდეგნაირად:

$$E^{\pm}(\boldsymbol{p}) = \pm\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} \tag{IV. 5}$$

ხოლო დირაკის ნაწილაკის საკუთარი იმპულსის მომენტის ვექტორის (სპინის) შესაბამისი ოპერატორი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4i}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha} \tag{IV. 6}$$

(2+1) განზომილებიან შემთხვევაში დირაკის სპინორის კომპონენტთა მინიმალუ შესაძლო რიცხვია 2. მაშინ, შესაბამისად, ჰამილტოანიანი გამოდის 2×2 მატრიცა. 2×2 კომპლექსურ კომპონენტებიანი მატრიცათა სიმრავლე მატრიცათა ჩვეულებრივი შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების მიმართ წარმოადგენს წრფივ სივრცეს, რომლის განზომილებაცაა 4. საბაზისო 4 წრფივად დამოუკიდებელ მატრიცად შეგვიძლია ავირჩიოთ პაულის მატრიცები $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ და $\sigma_0 \equiv \mathbb{1}_{2\times 2}$ ერთეულოვანი მატრიცა. ჩვენ კიდევ გვჭირდება საკუთარი იმპულსის მომენტისა და ენერგიის ორი შტოს წარმოდგენა. საბაზისო მატრიცათა შემცირებული რიცხვი იწვევს გარკვეულ პათოლოგიებს, რომლებიც არ გვაძლევს საშუალებას არაწინააღმდეგობრივად განვსაზღვროთ მრავალი სიმეტრია.

ავირჩიოთ შემდეგი წარმოდგენა:

$$\alpha_1 = \sigma_x, \qquad \alpha_2 = \sigma_y, \qquad \beta = \sigma_z \tag{IV. 7}$$

ხოლო γ მატრიცებისათვის კი გვექნება:

$$\gamma^0 = \sigma_z, \qquad \gamma^1 = i\sigma_y, \qquad \gamma^2 = -i\sigma_x \tag{IV. 8}$$

განვიხილოთ დირაკის ნაწილაკი xy სიბრტყეში. (2+1) განზომილებიანი H_D ჰამილტონიანი კომუტირებს სრული იმპულსის მომენტთან $J_z = L_z + S_z$, სადაც $L_z = xp_y - yp_x$ წარმოადგენს ორბიტალური იმპულსის მომენტის z კომპონენტას, ხოლო S_z-ისთვის კი, (6)-ის თანახმად, გვაქვს:

$$S_z = \frac{1}{4i}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha})_z = \frac{1}{4i}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1) = \frac{1}{2}\sigma_z \tag{IV. 9}$$

სრული იმპულსის მომენტი წარმოადგეს სასრული მობრუნებების გენერატორს. z ღერძის გარშემო მობრუნება $\mathcal{R}_z$ 2π კუთხით სისტემას თავის თავში ასახავს, ოღონდ მინუს ნიშნით:

$$\mathcal{D}\big(\mathcal{R}_z\,(2\pi)\big) = e^{i2\pi J_z} = -\mathbb{1} \tag{IV. 10}$$

§2. სივრცის ინვერსია

2 სივრცითი განზომილების შემთხვევაში გარდაქმნა $\boldsymbol{r} = (x, y) \to -\boldsymbol{r} = (-x, -y)$ არ წარმოადგენს სივრცის ინვერსიას, რადგანაც ის საკოორდინატო ღერძების ურთიერთორიენტაციას უცვლელს ტოვებს და ის ექვივალენტურია სიბრტის მობრუნებისა π კუთხით, რაც იმაშიც აისახება, რომ ამ გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი 1-ის ტოლია, და არა -1-ის. ამიტომაც 2 სივრცითი განზომილების შემთხვევაში სივრცის ინვერსიისათვის გვაქვს:

$$\boldsymbol{r} = (x, y) \mapsto \mathcal{P}_x\boldsymbol{r} = (x, -y) \tag{IV. 11}$$

ან:

$$\boldsymbol{r} = (x, y) \mapsto \mathcal{P}_y\boldsymbol{r} = (-x, y) \tag{IV. 12}$$

ამგვარადვე გარდაიქნება იმპულსისა $\boldsymbol{p}$ და სიჩქარის $\boldsymbol{v}$ ვექტორები. ცხადია, სივრცის ინვერსიის მიმართ ოპერატორის ინვარიანტობა სამართლიანი უნდა იყოს ორივე (11) და (12) შემთხვევისათვის. (11) და (12) იდან გამომდინარეობს, რომ L_z კენტია სივრცის ინვერსიის მიმართ:

$$\mathcal{P}_x L_z = \mathcal{P}_y L_z = -L_z \tag{IV. 13}$$

$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}$ ლუწობიდან სივრციის ინვერსიის მიმართ ვპოულობთ, რომ:

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}_i) = \sigma_i, \qquad i = x, y \tag{IV. 14}$$

აქედან გამომდინარეობს S_z და J_z ოპერატორების კენტობა სივრცის ინვერსიის მიმართ. მეორე მხრივ, β უნდა იყოს ლუწი სივრცის ინვერსიის მიმართ. რადგანაც $S_z = \frac{\beta}{2}$, შეუძლებელია ორივე ამ პირობის დაკმაყოფილება. მხოლოდ უმასუ ზღვარშია $m = 0$ ჰამილტონიანი H_D ინვარიანტული სივრცითი ინვერსიის მიმართ.

განვიხილოთ H_D დირაკის ჰამილტონიანისა და $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$ იმპულსის ოპერატორის საერთო საკუთარი ფუნქციები $\psi_{\boldsymbol{p}}^{\pm}(\boldsymbol{r})$. $m = 0$ ზღვარში $E^2 = p_x^2 + p_y^2 \neq 0$ და გვაქვს:

$$\psi_{\boldsymbol{p}}^{\pm}(\boldsymbol{r}) \propto e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \begin{pmatrix} E_{\pm} \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \qquad \text{(IV. 15)}$$

შესაბამისად:

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}_i)\psi_{\boldsymbol{p}}^{\pm}(\boldsymbol{r}) = \eta_{\boldsymbol{p}}^{\pm}\psi_{\mathcal{P}_i^{-1}\boldsymbol{p}}^{\pm}\left(\mathcal{P}_i^{-1}\boldsymbol{r}\right) \qquad \text{(IV. 16)}$$

სადაც $\eta_{\boldsymbol{p}}^{\pm}$ ფაზური მამრავლია.

§3. დროის შებრუნება

დროის შებრუნების მიმართ ინვარიანტობის ძირითადი მოთხოვნილებებიდან გამომდინარე, β უნდა იყოს ლუწი დროის შებრუნების მიმართ, S_z კი – კენტი. მაგრამ, რადგანაც ორივე ეს ოპერატორი პროპორციულია σ_z-ის, ეს ორი პირობა ერთმანეთს ეწინააღმდეგება. მაგრამ, ისევე, როგორც სივრცის ინვერსიის შემთხვევაში, დროის შებრუნება შეიძლება არაწინააღდეგობრივად განისაზღვროს უმასო ზღვარში:

$$\mathcal{T} = \hat{T}_0 K_0 \mathcal{T}_0, \qquad \hat{T}_0 = i\sigma_y \qquad \text{(IV. 17)}$$

ნებისმიერი სპინორისათვის $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ გვექნება:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \hat{T}_0 \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{pmatrix} = i\sigma_y \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2^* \\ -c_1^* \end{pmatrix} \qquad \text{(IV. 18)}$$

და $\mathcal{T}^2 = -\mathbb{1}$. ტალღური ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$\mathcal{T}\psi_{\boldsymbol{p}}^{\pm} = \hat{T}_0\psi_{\boldsymbol{p}}^{\pm *} = \zeta_{\boldsymbol{p}}^{\pm}\psi_{-\boldsymbol{p}}^{\pm} \qquad \text{(IV. 19)}$$

სადაც $\zeta_{\boldsymbol{p}}^{\pm}$ ფაზური მამრავლია. მაშასადამე, იმპულში იცვლება მოპირდაპირეთი, ხოლო ენერგია კი იგივე რჩება. ასევე მოპირდაპირეთი იცვლება S_z.

§4. მუხტური შეუღლება

მუხტური შეუღლება შეიძლება განისაზღვროს არაწინააღმდეგობრივად. შესაბაპისი ოპერატორისათვის გვექნება:

$$\mathcal{C} = \sigma_x K_0 \qquad \text{(IV.20)}$$

ასე რომ $\mathcal{C}^2 = \mathbb{1}$.

§5. დამატებითი თავისუბლების ხარისხიანი (2+1) განზომილებიანი დირაკის თეორია

როგორც ვნახეთ, სივრცის ინვერსიისა და დროის შებრუნების ოპერაციები არაწინააღმდეგობრივად (2+1) განზომილებიან დირაკის თეორიაში განისაზღვრება მხოლოდ უმასუ ზღვარში. მაგრამ, აღმოჩნდა, რომ ეს არადამაკმაყოფილებელი ვითარება შეიძლება გამოსწორებულ იქნას დამატებითი არომატული თავისუფლების ხარისხის შემოტანით დირაკის ფერმიონებისათვის.

შესაძლოა (2+1) განზომილებაში დირაკის ფერმიონთა ისეთი თეორიის აგება, რომლისათვისაც სივრცის ინვერსია და დროის შებრუნება, ისევე, როგორც ჩვეულებრივი (3+1) განზომილებიანი თეორიის შემთხვევაში, წარმოადგენს სიმეტრიებს, სასრული მასის შემთხვევაშიც კი. ამ თეორიაში დირაკის სპინორი ოთკომპონენტიანია და აღწერს ორ არომატს (დამატებითი თავისუფლების ხარისხი). დირაკის ჰამილტონიანი H_D ბლოკ-დიაგონალურია, α^j და β მატრიცების ერთ-ერთ შესაძლო არჩევანს წარმოადგენს:

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}\right), \qquad \beta = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix} \tag{IV. 21}$$

სპინის ოპერატორისათვის კი გვექნება:

$$S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{IV. 22}$$

ანუ, ერთ-არომატიანი შემთხვევისაგან განსხვავებით, β და S_z არ არის ერთმანეთის პროპორციულები ორ-არომატიან (2+1) განზომილებიან დირაკის თეორიაში. γ მატრიცებისთვის გვაქვს:

$$\gamma^0 = \beta, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_y & 0 \\ 0 & -i\sigma_y \end{pmatrix}, \qquad \gamma^2 = \begin{pmatrix} -i\sigma_x & 0 \\ 0 & i\sigma_x \end{pmatrix} \tag{IV. 23}$$

მობრუნებების გენერატორს კვლავ წარმოადგენს $J_z = L_z + S_z$, რომელიც შენახვადი სიდიდეა. ისევე, როგორც ერთ-არომატიან შემთხვევაში, 2π-ით მობრუნება ექვივალენტურია $-\mathbb{1}$, რაც დამახასიათებელია ნახევრის ტოლი სპინისთვის.

სივრცის ინვერსია და დროის შებრუნება განისაზღვრება როგორც გარდაქმნები, რომლებიც აკავშირებს ორ არომატულ ქვესივრცეს. თვითოელი გარდაქმნისათვის $\mathcal{P}_{x,y}$ ორი არაექვივალენტური წარმოდგენის რეალიზებაა შესაძლებელი:

$$\mathcal{D}^{\pm}(\mathcal{P}_i) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \pm\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{IV. 24}$$

რომლებიც გამოირჩევა თვისებით $\mathcal{D}^{\pm}(\mathcal{P}_i^2) = \pm\mathbb{1}$. მსგავსად, ანტიუნიტარული ოპერატორისათვის $\mathcal{T} = \hat{T}_0 K_0 \mathcal{T}_0$ გვექნება:

$$\hat{T}_0^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_y \\ \pm i\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \tag{IV. 25}$$

ეს ოპერატორი ჰამილტონიანს ინვარიანტულს ტოვებს, ხოლო სიჩქარეს, იმპულსსა და სპინს კი ნიშანს უცვლის. ნებისმიერ სპინორზე მოქმედება გვაძლევს:

$$\mathcal{T}^{\pm}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_4^* \\ c_3^* \\ \pm c_2^* \\ \mp c_1^* \end{pmatrix} \tag{IV. 26}$$

საიდანაც $(\mathcal{T}^{\pm})^2 = \pm\mathbb{1}$. მაშასადამე, ორ-არომატიან (2+1) განზომილებიან დირაკის თეორიაში შესაძლებელია, რომ ნაწილაკი იქცეოდეს როგორც უსპინო, როცა$(\mathcal{T})^2 = +\mathbb{1}$,

განსხვავებით სპინ $\frac{1}{2}$ შემთხვევისა, როცა $(\mathcal{T})^2 = -\mathbb{1}$.

მუხტური შეუღლების აუცილებელ და საკმარის პირობებს აკმაყოფილებს შემდეგი ოპერატორი:

$$\mathcal{C}^{\pm} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \mp\sigma_x \end{pmatrix} K_0 \tag{IV. 27}$$

დროის შებრუნებისგან განსხვავებით, მუხტური შეუღლება ინახავს არომატულ თავისუფლების ხარისხს: $(\mathcal{C}^{\pm})^2 = +\mathbb{1}$.

თავი V. (1+1) განზომილებიანი შემთხვევა.

§1. სიმეტრიები

(1+1) განზომილებიანი შემთხვევისთვისაც დირაკის სპინორის კომონენტთა მინიმალური რიცხვია 2. შეგვიძლია ავირჩიოთ $\alpha = \sigma_x, \beta = \sigma_z$. სივრცის ინვერსიისათვის $x \mapsto \mathcal{P}x = -x$ გვექნება:

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \sigma_z \Longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{P}^2) = +\mathbb{1} \qquad (\text{V}.\ 1)$$

დროის შებრუნებისათვის $\mathcal{T} = \hat{T}_0 K_0 \mathcal{I}_0$ გვექნება:

$$\hat{T}_0 = \sigma_z \Longrightarrow (\mathcal{T})^2 = +\mathbb{1} \qquad (\text{V}.\ 2)$$

რაც ასეც უნდა იყოს, რადგანაც დირაკის ნაწილაკი (1+1) განზომილებაში უსპინო ობიექტს წარმოადგენს. მუხტური შეუღლებისათვის გვექნება:

$$\mathcal{C} = \sigma_x K_0 \Longrightarrow (\mathcal{C})^2 = +\mathbb{1} \qquad (\text{V}.\ 3)$$

დასკვნა

მაშასადამე, ჩვენ განვიხილეთ დირაკის განტოლების სიმეტრიები როგორც უწყვეტი, ისე დისკრეტული გარდაქმნების მიმართ. უწყვეტ გარდაქმნებთან დაკავშირებით, მიმოვიხილეთ ლორენცის ჯგუფის ალგებრული და ტოპოლოგიური სტრუქტურა, მისი სხვადასხვა ტიპის წარმოდგენები. ამის შემდეგ გადავედით დაბალგანზომილებიანი სისტემების თვისებების შესწავლაზე, რაც განვახორციელეთ ასეთი სისტემების აღმწერი დირაკის განტოლების დისკრეტული სიმეტრიების გარდაქმნების გამოკვლევით. კერძოდ, განვიხილეთ შემდეგი დისკრეტული სიმეტრიების გარდაქმნები: მუხტური შეუღლება, სივრცის ინვერსია და დროის შებრუნება. ამ უკანასკნელი ორის არაწინაარმდეგობრივად განსაზღვრა (2+1) განზომილებიანი დირაკის თეორიაში 2 კომპონენტიანი სპინორით აღმოჩნდა შესაძლებელი მხოლოდ უმასო ზღვარში. ამის გამოსწორების მიზნით შემოვიტანეთ დამატებითი თავისუფლების ხარისხი დირაკის ნაწილაკისათვის, რაც აისახა იმაში, რომ, ნაცვალ 2 კომპონენტიანი სპინორისა, განვიხილეთ 4 კომპონენტიანი სპინორი. ამის შემდეგ მოვიყვანეთ (1+1) განზომილებიანი შემთხვევისათვის მოცემული დისკრეტული გარდაქმნების შესაბამისი ოპერატორების გამოსახულებები.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Franz Schwabl, R. Hilton, Angela Lahee - Advanced Quantum Mechanics-Springer (2010)

[2] J. J. Sakurai, Jim J. Napolitano - Modern Quantum Mechanics (2nd Edition) -Addison Wesley (2010)

[3] Боголюбов Н.Н - Собрание научных трудов, Том 10. Введение в теорию квантованных полей-Наука (2008)

[4] R. Winkler, U. Zülicke - Discrete symmetries of low-dimensional Dirac models A selective review with a focus on condensed-matter realizations