ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გიორგი თიღილაური

ტამბარას სტრუქტურა ზოგიერთი გალუას გაფართოების გროტენდიკის რგოლებზე

ხელმძღვანელი: PhD ირაკლი პაჭკორია

2019 წელი

თბილისი

ანოტაცია

თეზისი შეისწავლის ტამბარას სტრუქტურის არსებობის საკითხს რგოლების C_2-გალუას გაფართოების გროტენდიკის რგოლებზე. ტამბარას სტრუქტურა მოიცემა ორი რგოლით, სამი ფუნქციით და ჯგუფის მოქმედებით ერთ-ერთ რგოლზე რომლებიც აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს. ნაშრომში ჩვენ ვაგებთ ამ ფუნქციებს და ჯგუფის მოქმედებას რგოლების C_2-გალუას გაფართოების გროტენდიკის რგოლებისთვის და ვამოწმებთ ნახსენები პირობების სამართლიანობას.

Annotation

The thesis studies existence of Tambara structure on Grothendieck rings of C_2-Galois extension of rings. Tambara structure is given by two rings, three functions between them and group action on one of those rings all satisfying some conditions. In following work we construct these functions and a group action for Grothendieck rings of C_2-Galois extension of rings and verify aforementioned conditions.

სარჩევი

შესავალი

შესაძლებელია ველების გალუას გაფართოების ანალოგიურად განვმარტოთ რგოლების გალუას გაფართოება $S \subset R$. გალუას გაფართოება მოიცემა სასრული ჯგუფის მოქმედებასთან ერთად R-ზე რომლის ფიქსირებული რგოლი არის S-ი. ამის შემდეგ შეგვიძლია მათ შევუსაბამოთ მათი K_0-ები რომელიც თითოეულ კომუტაციურ რგოლს შეუსაბამებს ახალ კომუტაციურ რგოლს, ამ რგოლის მისაღებად დასაწყისისთვის ვიღებთ სასრულად წარმოქმნილი პროექციული R-მოდულების იზომორფიზმების კლასებს რომლებიც პირდაპირი ჯამით და ტენზორული ნამრავლით წარმოადგენს კომუტაციურ ნახევარრგოლს, ამ ნახევარრგოლის გროტენდიკის ჯგუფი წარმოადგენს კომუტაციურ რგოლს და არის ამ რგოლის K_0 .მოქმედება R-ზე გაგვიჩენს მოქმედებას $K_0(R)$-ზე. საინტერესოა თუ რა დამოკიდებულებაა $K_0(R)$-სა და $K_0(S)$-ს შორის. ირკვევა რომ ამ ორ რგოლზე გვაქვს ტამბარას სტრუქტურა. ტამბარას სტრუქტურა მოიცემა რგოლებზე A , B სადაც გვაქვს სასრული ჯგუფის მოქმედება B-ზე. ეს სტრუქტურა მოიცემა როგორც სამი ასახვა $res : A \to B$ და $tr, N : B \to A$ რომლებიც აკმაყოფილებენ გარკვეულ იგივეობებს. ჩვენი მიზანია ავაგოთ ეს ტამბარას სტრუქტურა როდესაც რგოლების გალუას გაფართოებაში გვაქვს მეორე რიგის ციკლური ჯგუფის მოქმედება. ეს სტრუქტურა ლიტერატურაში დღემდე აღწერილი არ ყოფილა.

1 პროექციული მოდული

ამ თავში განხილული განსაზღვრებები და წინადადებები მოცემულია წიგნში Cohn P. M. Basic algebra [1].

განმარტება 1.1 *R-მოდული P არის პროექციული თუ ნებისმიერი M და N მოდულებისთვის და ნებისმიერი ეპიმორფიზმისთვის $f : N \to M$ და ნებისმიერი ჰომომორფიზმისთვის $g : P \to M$ არსებობს ჰომომორფიზმი $h : P \to N$ რომელიც აკომუტირებს დიაგრამას $fh = g$.*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "f"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

წინადადება 1.1 *R-მოდული P-სთვის შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:*

P არის პროექციული.

არსებობს $R-$მოდული Q ისეთი რომ $P \oplus Q \cong F$ სადაც F თავისუფალი $R-$მოდულია.

არსებობენ სიმრავლეები $\{x_j \in P : j \in J\}$ და $\{f_j \in Hom(P, R) : j \in J\}$ ისეთები რომ ნებისმიერი $x \in P$-სთვის $f_j(x)$ არანულოვანია მხოლოდ სასრული რაოდენობა j-ებისთვის და $x = \sum_{j \in J} f_j(x)x_j$

მაგალითი 1.1 *ნებისმიერი თავისუფალი მოდული პროექციულია ცხადია $F \oplus 0 \cong F$*

2 გროტენდიკის ჯგუფი

ამ თავის განსაზღვრებები და წინადადებები მოცემულია წიგნში Charles A. Weibel, The K-book An Introduction to Algebraic K-theory [2].

განმარტება 2.1 *M კომუტაციური მონოიდის გროტენდიკის ჯგუფი არის აბელური ჯგუფი $G(M)$ და მონოიდების ჰომომორფიზმი $p : M \to G(M)$ ისეთი რომ ნებისმიერი H აბელური ჯგუფისთვის და ნებისმიერ მონოიდების ჰომომორფიზმისთვის $f : M \to H$ არსებობს ერთადერთი ჯგუფების ჰომომორფიზმი $g : G(M) \to H$ ისეთი რომ $gp = f$.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & G(M) \arrow[dl, dotted, "\exists ! g"] \\ H & \end{tikzcd}$$

წინადადება 2.1 *ნებისმიერი კომუტაციურ მონოიდს გააჩნია გროტენდიკის ჯგუფი.*

დამტკიცება. მოცემული კომუტაციური მონოიდი M-ისთვის გროტენდიკის ჯგუფი შეგვიძლია ავაგოთ შემდეგნაირად. ავიღოთ $M \times M$ რომელზეც მიმატება განსაზღვრულია ცალკეულ კომპონენტებზე. ავიღოთ ექვივალენტობის მიმართება $(a, b) \sim (c, d)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს $t \in M$ ისეთი რომ $a+d+t = b+c+t$. ავიღოთ $(M \times M)/\sim$ სადაც ელემენტ $[(a, b)]$ ავღნიშნავთ როგორც $a-b$. შეგვიძლია განვსაზღვროთ მიმატება როგორც $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$ ვთქვათ $a - b = a' - b'$ და $c - d = c' - d'$ მაშინ $a + b' + t_1 = a' + b + t_1$ და $c + d' + t_2 = c' + d + t_2$ ამ ორი ტოლობის შეკრებით $a + c + b' + d' + t_1 + t_2 = a' + c' + b + d + t_1 + t_2$ ეს კი ნიშნავს რომ $(a - b) + (c - d) = (a' - b') + (c' - d')$ მიმატება სწორად არის გასაზღვრული. ცხადია ასე განსაზღვრული მიმატება ასოციაციური და კომუტაციურია ელემენტი $0 = 0 - 0$ არის მიმატების ერთეული $(a - b) + 0 = 0 + (a - b) = a - b$ და ნებისმიერ ელემენტს გააჩნია შებრუნებული $(a-b)+(b-a) = (b-a)+(a-b) = 0$. მაშინ გროტენდიკის ჯგუფი მოიცემა ასე $G = ((M \times M)/\sim, +)$ გვაქვს მონოიდების ჰომომორფიზმი $p : M \to G$, $m \mapsto m - 0$.

ზემოთ მოცემული კონსტრუქცია აკმაყოფილებს უნივერსალობის თვისებას ვთქვათ მოცემულია H აბელური ჯგუფი და მონოიდების ჰომომორფიზმისთვის $f : M \to H$ მაშინ განვსაზღვროთ ჯგუფების ჰომომორფიზმი $g : G \to H$, $a - b \mapsto f(a) - f(b)$ ის სწორადაა განსაზღვრული რადგან როცა $a-b = a'-b'$ ესეიგი $a+b'+t = a'+b+t$ მაშინ $f(a)+f(b')+f(t) = f(a+b'+t) = f(a'+b+t) = f(a') + f(b) + f(t)$ ამიტომ f(a)-f(b)=f(a')-f(b'). ცხადია ეს ჰომომორფიზმია $g((a - b) + (c - d)) = g((a + c) - (b + d)) = f(a + c) - f(b + d) = f(a) + f(c) - f(b) - f(d) = g(a - b) + g(c - d)$ და $gp = f$. ეს ერთადერთი ასეთი ასახვაა რადგან $g(a - b) = g((a - 0) + (0 - b)) = g(p(a) - p(b)) = gp(a) - gp(b) = f(a) - f(b)$.

წინადადება 2.2 *ვთქვათ მოცემულია კომუტაციური მონოიდი M და მისი გროტენდიკის ჯგუფი $G(M)$, $p : M \to G(M)$ მაშინ გროტენდიკის ჯგუფი ნებისმიერი ელემენტები ჩაიწერება როგორც $p(a) - p(b)$, $a, b \in M$.*

დამტკიცება. ჩვენ აგებულ გროტენდიკის ჯგუფ G , $t : M \to G$-ში როგორც ვნახეთ ეს თვისება სრულდება ასევე არსებობს ერთადერთი იზომორფიზმი $f : G \to G(M)$ რომელიც აკომუტირებს შემდეგ დიაგრამას

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"'] & G(M) \\ G \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

ეს იზომორფიზმი გვაქვს გროტენდიკის ჯგუფის უნივერსალობიდან გამომდინარე. $\forall y \in G(M)$ შეგვიძლია ჩავწეროთ როგორც $f(x)$, $x \in G$ ასევე გვაქვს შემდეგი ტოლობა $x = t(a) - t(b)$ რომელიღაც $a, b \in M$ მაშინ რადგან დიაგრამა კომუტირებს $p(a)-p(b) = f(t(a)-t(b)) = f(x) = g$. აგრეთვე გვაქვს ორი ასე ჩაწერილის ტოლობა მხოლოდ შემდეგ შემთხვევაში $p(a)-p(b) = p(a') - p(b') \iff f(t(a)-t(b)) = f(t(a')-t(b)') \iff t(a)-t(b) = t(a')-t(b') \iff \exists c \in M(a+b'+c = a'+b+c)$

წინადადება 2.3 *ნახევარრგოლის გროტენდიკის ჯგუფი რგოლია, კომუტაციური ნახევარრგოლის გროტენდიკის ჯგუფი კომუტაციური რგოლია.*

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ნახევარრგოლი R როგორც ვნახეთ მისი გროტენდიკის ჯგუფის $G(R)$, $p : R \to G(R)$ ნებისმიერი ელემენტი ჩაიწერება როგორც $p(a) - p(b)$ სადაც $a, b \in R$. ავღნიშნოთ $p(a)$, $a \in R$ როგორც $\overline{a}$. განვსაზღვროთ გამრავლება $(\overline{a} - \overline{b})(\overline{c} - \overline{d}) = \overline{ac+bd} - \overline{ad+bc}$ და ვაჩვენოთ რომ კორექტულადაა განსაზღვრული. ვთქვათ $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a'} - \overline{b'}$ და $\overline{c} - \overline{d} = \overline{c'} - \overline{d'}$ ეს ნიშნავს რომ ნახევარრგოლში გვაქვს შემდეგი ტოლობები $a+b'+m = a'+b+m$, $c+d'+n = c'+d+n$ თუ პირველ ტოლობას მარჯვნიდან გავამრავლებთ c-ზე ასევე გავამრავლებთ d-ზე ხოლო მეორე ტოლობას მარცხნიდან გავამრავლებთ a'-ზე და b'-ზე შემდეგ მიღებული ოთხი ტოლობის შეკრებით ვიღებთ $ac+bd+a'd'+b'c'+(b'c+mc+a'd+md+a'c+a'n+b'd+b'n) = a'c'+b'd'+ad+bc+(b'c+mc+a'd+md+a'c+a'n+b'd+b'n)$ რაც გვაძლევს სასურველ ტოლობას $(\overline{a}-\overline{b})(\overline{c}-\overline{d}) = (\overline{a'}-\overline{b'})(\overline{c'}-\overline{d'})$. მარტივი შესამოწმებელია რომ ეს გამრავლება აკმაყოფილებს ასოციატულობას და დისტრიბუტიულობას. ასევე ადვილი დასანახია რომ გამრავლების ერთეულია $\overline{1}$. ხოლო თუ დამატებით R არის კომუტაციური მაშინ $G(R)$ არის კომუტაციური რგოლი.

წინადადება 2.4 *R ნახევარრგოლის გროტენდიკის ჯგუფი $G(R)$, $p : R \to G(R)$ არის რგოლი ნებისმიერი რგოლი S-ისთვის და ნებისმიერი ნახევარრგოლების მორფიზმისთვის $f : R \to S$*

არსებობს ერთადერთი რგოლების მორფიზმი $h : G(R) \to S$ რომელიც აკომუტირებს შემდეგ დიაგრამას.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & G(R) \arrow[dl, dotted, "\exists! h"] \\ S & \end{tikzcd}$$

დამტკიცება. როგორც უკვე ვიცით გვაქვს ერთადერთი ადიტიური ასახვა $h : G(R) \to S$ ვაჩვენოთ რომ ის მულტიპლიკატიურია. $h((\overline{a}-\overline{b})(\overline{c}-\overline{d})) = h(\overline{ac+bd}-\overline{ad+bc}) = f(ac+bd)-f(ad+bc) = f(a)f(c)+f(b)f(d)-f(a)f(d)-f(b)f(c) = (f(a)-f(b))(f(c)-f(d)) = f(a-b)f(c-d) = h(\overline{a}-\overline{b})h(\overline{c}-\overline{d})$.

წინადადება 2.5 *კომუტაციური მონოიდის გროტენდიკის ჯგუფი არის ფუნქტორი კომუტაციური მონოიდებიდან კომუტაციურ ჯგუფებში ასევე ნახევარრგოლებიდან რგოლებში და კომუტაციური ნახევარრგოლებიდან კომუტაციურ რგოლებში.*

დამტკიცება. ფუნქტორი ასახავს მორფიზმებს შემდეგნაირად

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[d, "p'"] \\ G(M) \arrow[r, "G(f)"] & G(N) \end{tikzcd}$$

როგორც ვიცით $G(f)$ ერთადერთია

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "id_M"] \arrow[d, "p"'] & M \arrow[d, "p"] \\ G(M) \arrow[r, "G(id_M)"] & G(M) \end{tikzcd}$$

რადგან ეს დიაგრამა კომუტირებს და ქვედა ასახვა ერთადერთია $G(id_M) = id_{G(M)}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p'"] & L \arrow[d, "p''"] \\ G(M) \arrow[r, "G(f)"] & G(N) \arrow[r, "G(h)"] & G(L) \end{tikzcd}$$

მცირე კვადრატები კომუტირებენ აქედან გამომდინარე დიდი მართკუთხედი კომუტირებს და ასახვის ერთადერთობიდან გამომდინარე $G(hf) = G(h)G(f)$.

3 რგოლის K_0

ამ თავის განსაზღვრებები და წინადადებები მოცემულია წიგნში Charles A. Weibel, The K-book An Introduction to Algebraic K-theory [2].

წინადადება 3.1 *კომუტაციური რგოლი R-ისთვის სასრულად წარმოქმნილი პროექციული R-მოდულებზე შემოვიტანთ ექვივალენტობის მიმართებას იზომორფიზმს გვექნება ფაქტორ სიმრავლე $P(R)$ ეს სიმრავლე მიმატებით $\oplus$ და გამრავლებით $\otimes$ წარმოადგენს ნახევარრგოლს ადიტიური ერთეულით 0 და მულტიპლიკაციური ერთეულით R.*

განმარტება 3.1 *კომუტაციური რგოლი R-ისთვის $K_0(R)$ არის $P(R)$ ის გროტენდიკის რგოლი $K_0(R) = G(P(R))$.*

მაგალითი 3.1 *ნებისმიერ ველი F-ისთვის დავთვალოთ $K_0(F)$ რადგან ნებისმიერი მოდული ველზე თავისუფალია გვაქვს იზომორფიზმი $P(F) \cong \mathbb{N}$, $F^n \mapsto n$ აქედან გამომდინარე გროტენდიკის ჯგუფი იქნება $G(P(F)) \cong \mathbb{Z}$ ამიტომ $K_0(F) = \mathbb{Z}$.*

მაგალითი 3.2 *მოცემულია მთავარი იდეალების რგოლი R დავთვალოთ მისი K_0. მთავარი იდეალების რგოლზე ნებისმიერი პროექციული მოდული თავისუფალია ამიტომ გვაქვს იზომორფიზმი $P(R) \cong \mathbb{N}$, $R^n \mapsto n$ აქედან გამომდინარე $G(P(R)) \cong \mathbb{Z}$ რაც გვაძლევს საძიებელ რგოლს $K_0(R) = \mathbb{Z}$. კერძოდ $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ და ნებისმიერი ველი F-ისთვის $K_0(F[x]) = \mathbb{Z}$.*

ბოლო ორ მაგალითში გამოვიყენეთ ის რომ თავისუფალი მოდულები კომუტაციურ რგოლზე ცალსახად განისაზღვრებიან განზომილებით კერძოდ თუ R კომუტაციური რგოლია გვაქვს რომ $R^n \cong R^m \iff n = m$.

4 რგოლების გალუას გაფართოება

ამ თავის განსაზღვრებები და წინადადებები აღებულია წიგნიდან Cornelius Greither, Cyclic Galois Extensions of Commutative Rings [3].

კომუტაციური რგოლების გაფართოება $S \subset R$-ისთვის აღვნიშნოთ ჩადგმა $i : S \to R$. S-ალგებრა $R^{(G)}$ არის ფუნქციები G-დან R-ში ჩვეული გამრავლებით და მიმატებით, ხოლო R^G ავღნიშნავთ R-ის ფიქსირებულ ნაწილს. $R \otimes_S R$ არის R-ალგებრა სადაც სკალარზე გამრავლება ხდება მარცხენა მხარეზე ხოლო ელემენტების გამრავლება მოიცემა როგორც $(a \otimes b)(x \otimes y) = (ax \otimes by)$.

განმარტება 4.1 *ვთქვათ მოცემულია კომუტაციური რგოლების გაფართოება $S \subset R$ ვიტყვით რომ ის არის G-გალუას გაფართოება როცა G არის $Aut(R/S) = \{f : R \to R : f$ არის S-ალგებრის ავტომორფიზმი და $fi = id_S\}$ ის ქვეჯგუფი ასევე $S = R^G$ და R-ალგებრების ჰომომორფიზმი $h : R \otimes_S R \to R^{(G)}$, $x \otimes y \mapsto (x\sigma(y))_{\sigma \in G}$ იზომორფიზმია.*

მაგალითი 4.1 *ველების სასრული გალუას გაფართოება $K \subset L$ არის რგოლების გალუას გაფართოება. მართლაც ვთქვათ $\{b_1, ..., b_n\}$ იყოს L-ის ბაზისი როგორც K-ზე ვექტორული სივრცის. მაშინ*

$\{1\otimes b_1,...,1\otimes b_n\}$ *იქნება* $L\otimes_K L$*-ის ბაზისი* L*-ზე. იმისთვის რომ* $h : L\otimes_K L \to L^{(G)}$ *იყოს იზომორფიზმი აუცილებელი და საკმარისია რომ კვადრატული მატრიცას* $(\sigma(b_j))_{\sigma\in G, j\in\{1,...,n\}}$ *რანგი იყოს* n*-ის ტოლი. დედეკინის ლემიდან გამომდინარე ვექტორები* $(\sigma(b_1),...,\sigma(b_n))$ *,* $\sigma \in G$ *წრფივად დამოუკიდებლებია რაც ამტკიცებს რომ* h*-ი იზომორფიზმია.*

წინადადება 4.1 *(დედეკინის ლემა) თუ მოცემულია წყვილწყვილად განსხვავებული ველების ჰომომორფიზმები* $\sigma_1,...,\sigma_n : A \to C$ *მაშინ ეს ასახვები* C*-ზე წრფივად დამოუკიდებლებია ანუ თუ* $\sum c_j\sigma_j = 0$ *მაშინ ყველა* $c_j = 0$*.*

წინადადება 4.2 *თუ* $S \subset R$ *არის სასრული გალუას გაფართოება მაშინ* R *არის პროექციული* S*-მოდული.*

დამტკიცება. რადგან $h : R\otimes_S R \to R^{(G)}$ *,* $x\otimes y \mapsto (x\sigma(y))_{\sigma\in G}$ *იზომორფიზმია არსებობს ელემენტი* $\sum x_j\otimes y_j \in R\otimes_S R$ *რომ* $h(\sum x_j\otimes y_j) = (\sum x_jy_j,...,\sum x_j\sigma_{n-1}(y_j)) = (1,0,...,0)$*. განვსაზღვროთ ასახვა* $\varphi_j(z) : R \to S$ *,* $z \mapsto \sum_{\sigma\in G}\sigma(zy_j)$*. გვაქვს დუალური ბაზისი* $\{x_1,...,x_n\}$ *და* $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *სადაც* $|G| = n$*. რადგან* $\sum_j \varphi_j(z)x_j = \sum_j(\sum_{\sigma\in G}\sigma(z)\sigma(y_j))x_j = z$*.*

5 ტამბარას სტრუქტურა მეორე რიგის ციკლური ჯგუფისთვის

შემდეგი განსაზღვრება აღებულია სტატიიდან Strickland N. P., Tambara functors [4].

განმარტება 5.1 *ტამბარას წყვილი შედგება რგოლებისგან* S *და* R *ჯგუფი* $G = C_2$*-ს მოქმედებისგან* R*-ზე რგოლების ჰომომორფიზმისგან* $res : S \to R^G$ *და შემდეგი სიმრავლურ თეორიული ასახვებისგან* $tr, N : R \to S$ *რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ თვისებებს:*

$tr(0) = 0$

$tr(a+b) = tr(a) + tr(b)$

$tr(\bar{a}) = tr(a)$

$res(tr(a)) = a + \bar{a}$

$N(0) = 0$

$tr(ares(b)) = tr(a)b$

$N(1) = 1$

$N(ab) = N(a)N(b)$

$N(\bar{a}) = N(a)$

$res(N(a)) = a\bar{a}$

$N(a+b) = N(a) + N(b) + tr(a\bar{b})$

6 ჯგუფი C_2-ს მოქმედება $K_0(R)$-ზე

ჯგუფი C_2 მოქმედებს რგოლ R-ზე ეს მოქმედება გადავიტანოთ $P(R)$-ზე ამის შემდეგ რადგან გროტენდიკის ჯგუფი ფუნქტორია განვსაზღვროთ ჯგუფის მოქმედება $K_0(R)$-ზე. თუ გვაქვს $C_2 = \{1, \tau\}$ ცხადია 1-იანი როგორ მოქმედებს განვსაზღვროთ $\tau(P) = \tau^*P$ მაშინ ასეთი ასახვა აკმაყოფილებს თვისებებს.

წინადადება 6.1 *სასრულად წარმოქმნილი პროექციული R-მოდული P-ისთვის τ^*P სასრულად წარმოქმნილი პროექციულია.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ თავისუფალი მოდულებისთვის. F იყოს თავისუფალი R მოდული მაშინ $\tau^*F \cong F$. გვაქვს $F \cong R^A$ და $\tau^*F \cong \tau^*R^A$ და იზომორფიზმი $f : R^A \to \tau^*R^A$, $x = (x_i)_{i\in A} \mapsto (\tau(x_i))_{i\in A}$ ამიტომ τ^*F თავისუფალია. ნებისმიერი პროექციული მოდული P არის თავისუფალი მოდულის რეტრაქტი, ესეიგი არსებობს ასახვები:

$$P \underset{f}{\overset{g}{\leftrightarrows}} F$$

ისეთები რომ $gf = id_P$ ეს ასახვები გვიჩენენ შემდეგ ასახვებს

$$\tau^*P \underset{f'}{\overset{g'}{\leftrightarrows}} \tau^*F$$

გვაქვს $g'f' = id_{\tau^*P}$ როგორც ვნახეთ τ^*F თავისუფალია. თავისუფალის რეტრაქტი კი პროექციულია თუ გვაქვს სასრულად წარმოქმნილი პროექციული მოდული ის იქნება სასრულად წარმოქმნილი თავისუფალი მოდული F-ის რეტრაქტი მაშინ τ^*F-იც სასრულად წარმოქმნილია და შესაბამისად მისი რეტრაქტიც.

წინადადება 6.2 $\tau^*(P \oplus Q) \cong \tau^*P \oplus \tau^*Q$

დამტკიცება. რადგან τ^* ფუნქტორია ამიტომ არსებობს კანანოკური წრფივი ასახა $f : \tau^*P \oplus \tau^*Q \to \tau^*(P \oplus Q)$, $(p, q) \mapsto (p, q)$ და ამ შემთხვევაში ის იზომორფიზმია.

წინადადება 6.3 $\tau^*(P \otimes_R Q) \cong \tau^*P \otimes_R \tau^*Q$

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ტენზორული ნამრავლის უნივერსალური თვისება შემდეგი ბიწრფივი ასახვისათვის $f : P \times Q \to \tau^*(\tau^*P \otimes_R \tau^*Q)$, $(p, q) \mapsto p \otimes q$ გვაქვს $f(p + p', q) = (p + p') \otimes q = p\otimes q+p'\otimes q = f(p, q)+f(p', q)$ და $f(rp, q) = (rp)\otimes q = (\tau(r)p)\otimes q = \tau(r)(p\otimes q) = r(p\otimes q)$ ანალოგიურად გვექნება წრფივობა მეორე კომპონენტში უნივერსალური თვისებით არსებობს ერთადერთი წრფივი ასახვა რომელიც შემდეგ დიაგრამას აკომუტირებს

$$\begin{tikzcd}
P \times Q \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & P \otimes_R Q \arrow[dl, dotted, "\exists! f'"] \\
\tau^*(\tau^* P \otimes_R \tau^* Q) &
\end{tikzcd}$$

ნებისმიერი წრფივი ასახვა $t : M \to N$ გვაძლევს წრფივ ასახვას $t' : \tau^* M \to \tau^* N$ რომელიც ელემენტებზე მოქმედებს ანალოგიურად $m \mapsto t(m)$. წრფივობა შემდეგი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს $t'(m+m') = t(m+m') = t(m)+t(m') = t'(m)+t'(m')$, $t'(rm) = t'(\tau(r)m) = t(\tau(r)m) = \tau(r)t(m) = rt(m) = rt'(m)$.

რადგან $\tau^*\tau^*(\tau^*P \otimes_R \tau^*Q) = \tau^*P \otimes_R \tau^*Q$ გვიჩნდება შემდეგი წრფივი ასახვა $\bar{f} : \tau^*(P \otimes_R Q) \to \tau^*P \otimes_R \tau^*Q$ რომელიც წარმომქმნელებზე მოქმედებს შემდეგნაირად $p \otimes q \mapsto p \otimes q$.

შემდეგი ასახვა $g : \tau^*P \times \tau^*Q \to \tau^*(P \otimes_R Q)$, $(p,q) \mapsto p \otimes q$ ბიწრფივია ადიტიურობა ცხადია ასევე სკალარზე გამრავლებასთან შეთანხმებულობაც $g(rp,q) = g(\tau(r)p,q) = (\tau(r)p) \otimes q = \tau(r)(p \otimes q) = \tau\tau(r)(p \otimes q) = r(p \otimes q)$ და ისევ ტენზორული ნამრავლის უნივერსალობით ვიღებთ ერთადერთ წრფივ ასახვას რომელიც ხდის შემდეგ დიაგრამას კომუტაციურს.

$$\begin{tikzcd}
\tau^*P \times \tau^*Q \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \tau^*P \otimes_R \tau^*Q \arrow[dl, dotted, "\exists! \bar{g}"] \\
\tau^*(P \otimes_R Q) &
\end{tikzcd}$$

ეს ასახვები ერთმანეთის შებრუნებულებია $\bar{g}\bar{f} = id_{\tau^*(P \otimes_R Q)}$, $\bar{f}\bar{g} = id_{\tau^*P \otimes_R \tau^*Q}$.

წინადადება 6.4 *$\tau^*R \cong R$.*

დამტკიცება. გვაქვს მოდულების იზომორფიზმი $f : \tau^*R \to R$, $r \mapsto \tau(r)$.

ეს თვისებები ერთად გვეუბნებიან რომ τ არის ნახევარრგოლების ასახვა ამიტომ უკვე ცნობილი დებულებიდან გაგვიჩნდება რგოლების ასახვა $\tau : K_0(R) \to K_0(R)$, $[P]-[Q] \mapsto [\tau^*P]-[\tau^*Q]$. რადგან $\tau\tau = id_{K_0(R)}$ გვიჩნდება C_2-ის მოქმედება $K_0(R)$-ზე.

7 res C_2-გალუას გაფართოების გროტენდიკის ჯგუფისთვის

ვთქვათ $S \to R$ C_2-გალუას გაფართოებაა. განვსაზღვროთ ასახვა სასრულად წარმოქმნილ პროექციულ მოდულთა ნახევარრგოლზე და გავავრცელოთ გროტენდიკის ჯგუფებზე $res' : P(S) \to P(R)$, $P \mapsto R \otimes_S P$ ეს ასახვა სწორადაა განსაზღვრული რადგან როცა გვაქვს რგოლების სასრული გალუას გაფართოება R სასრულად წარმოქმნილი პროექციული S-მოდულია სასრულად წარმოქმნილი პროექციული მოდულების ტენზორული ნამრავლი კი სასრულად წარმოქმნილი პროექციულია. შევამოწმოთ რომ ეს ასახვა ნახევარრგოლების ჰომომორფიზმია ვაჩვენოთ რომ $res'(P \oplus Q) = res'(P) \oplus res'(Q)$, $res'(P \otimes_S Q) = res'(P) \otimes_R res'(Q)$, $res'(S) = R$

წინადადება 7.1 $R \otimes_S S \cong R$

დამტკიცება. S-მოდულების ბიწრფივი ასახვა $f : R \times S \to R$, $(r, s) \mapsto sr$ გვაძლევს შემდეგ ერთადერთ წრფივ ასახვას რომელიც აკომუტირებს შემდეგ დიაგრამას

$$\begin{tikzcd} R \times S \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \otimes_S S \arrow[dl, dotted, "\exists ! f'"] \\ R & \end{tikzcd}$$

რომელიც ასევე R-მოდულების ჰომომორფიზმია $f'(r(\sum r_i \otimes s_i)) = f'(\sum (rr_i) \otimes s_i) = \sum s_i rr_i = r \sum s_i r_i = rf'(\sum r_i \otimes s_i)$. გვაქვს წრფივი R-მოდულების ასახვა $g : R \to R \otimes_S S$, $r \mapsto r \otimes 1$. გვაქვს $f'g(r) = f'(r \otimes 1) = r$ და $gf'(r \otimes s) = g(sr) = (sr) \otimes 1 = r \otimes s$ ამიტომ გვაქვს შემდეგი ტოლობები $f'g = id_R$, $gf' = id_{R \otimes_S S}$.

წინადადება 7.2 $R \otimes_S (P \oplus Q) \cong (R \otimes_S P) \oplus (R \otimes_S Q)$

დამტკიცება. ავიღოთ S-მოდულების ბიწრფივი ასახვა $f : R \times (P \oplus Q) \to (R \otimes_S P) \oplus (R \otimes_S Q)$, $(r, (p, q)) \mapsto (r \otimes p, r \otimes q)$ და ავიღოთ მისი შესაბამისი წრფივი ასახვა

$$\begin{tikzcd} R \times (P \oplus Q) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \otimes_S (P \oplus Q) \arrow[dl, dotted, "\exists ! f'"] \\ (R \otimes_S P) \oplus (R \otimes_S Q) & \end{tikzcd}$$

ვაჩვენოთ რომ f' R-მოდულების წრფივი ასახვაც არის $f'(r \sum r_i \otimes (p_i, q_i)) = f'(\sum (rr_i) \otimes (p_i, q_i)) = \sum ((rr_i) \otimes p_i, (rr_i) \otimes q_i) = r \sum (r_i \otimes p_i, r_i \otimes q_i) = rf'(\sum r_i \otimes (p_i, q_i))$.

ავიღოთ შემდეგი ბიწრფივი ასახვები $g : R \times P \to R \otimes_S (P \oplus Q)$, $(r, p) \mapsto (r \otimes (p, 0))$ და $g : R \times Q \to R \otimes_S (P \oplus Q)$, $(r, q) \mapsto (r \otimes (0, q))$ გვიჩნდება ორი წრფივი ასახვა რომლებიც შემდეგ დიაგრამებს აკომუტირებენ

$$\begin{tikzcd} R \times P \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & R \otimes_S P \arrow[dl, dotted, "\exists ! g'"] \\ R \otimes_S (P \oplus Q) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \times Q \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & R \otimes_S Q \arrow[dl, dotted, "\exists ! h'"] \\ R \otimes_S (P \oplus Q) & \end{tikzcd}$$

ეს ასახვები წრფივი R-მოდულების ჰომომორფიზმებიცაა $g'(r(\sum r_i \otimes p_i)) = g'(\sum (rr_i) \otimes p_i) = \sum (rr_i) \otimes (p_i, 0) = r \sum r_i \otimes (p_i, 0) = rg'(\sum r_i \otimes p_i)$ მაშინ არსებობს R-მოდულების მორფიზმი $k : (R \otimes_S P) \oplus (R \otimes_S Q) \to R \otimes_S (P \oplus Q)$ ეს ასახვა ელემენტებზე იმოქმედებს შემდეგნაირად $(r \otimes p, r' \otimes q) \mapsto r \otimes (p, 0) + r' \otimes (0, q)$. გვაქვს $f'k(r \otimes p, r' \otimes q) = f'(r \otimes (p, 0) + r' \otimes (0, q)) = (r \otimes p, 0) + (0, r' \otimes q) = (r \otimes p, r' \otimes q)$ და $kf'(r \otimes (p, q)) = k(r \otimes p, r \otimes q) = r \otimes (p, 0) + r \otimes (0, q) = r \otimes (p, q)$ ამიტომ $f'k = id_{(R \otimes_S P) \oplus (R \otimes_S Q)}$, $kf' = id_{R \otimes_S (P \oplus Q)}$.

წინადადება 7.3 $R \otimes_S (P \otimes_S Q) \cong (R \otimes_S P) \otimes_R (R \otimes_S Q)$

დამტკიცება. გვაქს მულტიწრფივი S-მოდულების მორფიზმი $f : R\times P\times Q \to (R\otimes_S P)\otimes_R(R\otimes_S Q)$, $(r,p,q) \mapsto (r\otimes p)\otimes(1\otimes q)$ *ავიღოთ მისი შესაბამისი წრფივი ასახვა რომელიც აკომუტირებს შემდეგ დიაგრამას*

$$\begin{tikzcd} R \times P \times Q \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \otimes_S (P \otimes_S Q) \arrow[dl, dotted, "\exists! f'"] \\ (R\otimes_S P)\otimes_R (R\otimes_S Q) & \end{tikzcd}$$

$f'(r'(r\otimes(p\otimes q))) = f'((r'r)\otimes(p\otimes q)) = ((r'r)\otimes p)\otimes(1\otimes q) = r'((r\otimes p)\otimes(1\otimes q)) = r'f'(r\otimes(p\otimes q))$ *ამიტომ* f' R*-მოდულების ჰომომორფიზმია.*

ფიქსირებული $R\otimes_S Q$*-ის ელემენტის ფიქსირებული წარმოდგენისთვის* $\sum r_j \otimes q_j$ *ავიღოთ ბიწრფივი ასახვა* $g_{((r'_j,q_j))_j} : R\times P \to R\otimes_S (P\otimes_S Q)$, $(r,p) \mapsto \sum (rr_j)\otimes(p\otimes q_j)$ *ეს გვაძლევს შემდეგ წრფივ ასახვას*

$$\begin{tikzcd} R \times P \arrow[r] \arrow[d, "g_{((r_j,q_j))_j}"'] & R \otimes_S P \arrow[dl, dotted, "\exists! g'_{((r_j,q_j))_j}"] \\ R\otimes_S (P\otimes_S Q) & \end{tikzcd}$$

ეს ასახვა R*-მოდულების მორფიზმია* $g'_{((r_j,q_j))_j}(r'(r\otimes p)) = \sum (r'rr_j)\otimes(p\otimes q_j) = r'\sum(rr_j)\otimes(p\otimes q_j) = r'g'_{((r_j,q_j))_j}(r\otimes p)$ *ანალოგიური პროცედურით მივიღებთ წრფივ ასახვას* $h'_{((r_i,p_i))_i} : R\otimes_S Q \to R\otimes_S (P\otimes_S Q)$. *ახლა განვსაზღვროთ ასახვა* $k : (R\otimes_S P)\times(R\otimes_S Q) \to R\otimes_S (P\otimes_S Q)$, $(\sum r_i\otimes p_i)\times(\sum r'_j \otimes q_j) \mapsto \sum\sum (r_i r'_j)\otimes(p_i\otimes q_j)$ *თუ დავაფიქსირებთ რომელიმე მხარეს მივიღებთ ერთ ერთ წინა ორი ასახვიდან ამის გამო ეს ასახვა სწორადაა განსაზღვრული და ბიწრფივია ამიტომ იარსებებს წრფივი ასახვა რომელიც აკომუტირებს შემდეგ დიაგრამას*

$$\begin{tikzcd} (R\otimes_S P)\times(R\otimes_S Q) \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & (R\otimes_S P)\otimes_R (R\otimes_S Q) \arrow[dl, dotted, "\exists! k'"] \\ R\otimes_S (P\otimes_S Q) & \end{tikzcd}$$

გვაქვს შემდეგი ტოლობები $f'k'((\sum r_i\otimes p_i)\otimes(\sum r'_j\otimes q_j)) = f'(\sum\sum(r_i r'_j)\otimes(p_i\otimes q_i)) = \sum\sum((r_i r'_j)\otimes p_i)\otimes(1\otimes q_j) = \sum\sum(r_i\otimes p_i)\otimes(r'_j\otimes q_j) = (\sum r_i\otimes p_i)\otimes(\sum r'_j\otimes q_j)$ *და* $k'f'(r\otimes(p\otimes q)) = k'((r\otimes p)\otimes(1\otimes q)) = r\otimes(p\otimes q)$ *ანუ* $k'f' = id_{R\otimes_S(P\otimes_S Q)}$ *და* $f'k' = id_{(R\otimes_S P)\otimes_R(R\otimes_S Q)}$.

წინადადება 7.4 $R\otimes_S P \cong \tau^*(R\otimes_S P)$

დამტკიცება. ავიღოთ ბიწრფივი ასახვა $f : R\times P \to \tau^*(R\otimes_S P)$, $(r,p)\mapsto \tau(r)\otimes p$ *ეს მოგვცემს წრფივ ასახვას*

$$\begin{tikzcd} R \times P \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \otimes_S P \arrow[dl, dotted, "f'"] \\ \tau^*(R \otimes_S P) & \end{tikzcd}$$

$f'(r'(r\otimes p)) = \tau(r'r)\otimes p = r'(\tau(r)\otimes p) = r'f'(r\otimes p)$ *გაგვიჩნდება* $f'' : \tau^*(R\otimes_S P) \to \tau^*\tau^*(R\otimes_S P) = R\otimes_S P$ *და* $f'f'' = id_{\tau^*(R\otimes_S P)}$, $f''f' = id_{R\otimes_S P}$

ამის შემდეგ გროტენდიკის ჯგუფის ფუნქტორობიდან გამომდინარე ვიღებთ რგოლების ჰომომორფიზმს $res = G(res') : K_0(S) \to K_0(R)$ *და* $\tau(res([P]-[Q])) = [\tau^*res(P)] - [\tau^*res(Q)] = res([P]-[Q])$ *ამიტომ გვაქვს რგოლების ჰომომორფიზმი* $res : K_0(S) \to K_0(R)^{C_2}$.

8 tr გალუას გაფართოების გროტენდიკის ჯგუფისთვის

შემოვიღოთ $tr : P(R) \to P(S)$ *სასრულად წარმოქმნილი პროექციული მოდულების ნახევარრგოლზე და რადგან გროტენდიკის ჯგუფი ფუნქტორია გადავიტანოთ* $tr : K_0(R) \to K_0(S)$. *განვსაზღვროთ* $tr(P) = i^*P$

წინადადება 8.1 *თუ P სასრულად წარმოქმნილი პროექციული R-მოდულია მაშინ i^*P სასრულად წარმოქმნილი S-მოდულია*

დამტკიცება. გვაქვს R-მოდულების იზომორფიზმი $P \oplus Q \cong R^n$ რადგან გვაქ გალუას გაფართოება R სასრულად წარმოქმნილი პროექციული S-მოდულია ამიტომ გვექნება S-მოდულების იზომორფიზმი $R \oplus T \cong S^m$ ამიტომ გვექნება $P \oplus (Q \oplus T^n) \cong (P \oplus Q) \oplus T^n \cong R^n \oplus T^n \cong S^{nm}$.

წინადადება 8.2 $i^*(P \oplus Q) \cong i^*P \oplus i^*Q$

დამტკიცება. იზომორფიზმი მოიცემა იგივური ასახვით.

$tr(P\oplus Q) = i^*(P\oplus Q) \cong i^*P\oplus i^*Q = tr(P)\oplus tr(Q)$. *ამის შემდეგ გვიჩნდება აბელური ჯგუფების ჰომომორფიზმი* $tr : K_0(R) \to K_0(S)$.

9 res-ის და tr-ს თვისებების დამტკიცება

წინადადება 9.1 *tr(0)=0 და tr(a+b)=tr(a)+tr(b)*

დამტკიცება. ცხადია რადგან tr ჯგუფების ჰომომორფიზმია.

წინადადება 9.2 $tr(\tau(a)) = tr(a)$

დამტკიცება. გვაქვს შემდეგი იზომორფიზმი $tr(\tau^*P) = i^*(\tau^*P) \cong i^*P = tr(P)$ *ის მოიცემა იგივური ასახვით* $id : i^*(\tau^*P) \to i^*P$, $p \mapsto p$ *რომელიც მოდულების ჰომომორფიზმია რადგან*

$id(sp) = id(\tau(s)p) = id(sp) = sp = sid(p)$ ამის შემდეგ ადვილად მტკიცდება ზოგადი შემთხვევა რადგან ეს ორი მონოიდების მორფიზმი ემთხვევა $P(R)$-ზე და შესაბამისად გროტენდიკის რგოლზეც.

წინადადება 9.3 $tr(ares(b)) = tr(a)b$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ შემდეგი იზომორფიზმი $tr(Pres(Q)) = i^*(P \otimes_R (R \otimes_S Q)) \cong i^*P \otimes_S Q = tr(P)Q$ განვიხილოთ შემდეგი ბიწრფივი ასახვა $g : i^*P \times Q \to i^*(P \otimes_R (R \otimes_S Q))$, $(p, q) \mapsto p \otimes (1 \otimes q)$ მაშინ ტენზორული ნამრავლის უნივერსალური თვისებით არსებობს ერთადერთი S-მოდულების ჰომომორფიზმი რომელიც აკომუტირებს შემდეგ დიაგრამას

$$\begin{tikzcd}
i^*P \times Q \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & i^*P \otimes_S Q \arrow[dl, dotted, "g'"] \\
i^*(P \otimes_R (R \otimes_S Q)) &
\end{tikzcd}$$

ის მოქმედებს ელემენტებზე როგორც $p \otimes q \mapsto p \otimes (1 \otimes q)$. ეს ასახვა R-მოდულების ჰომომორფიზმიცაა.

გვაქვს S-მოდულების იზომორფიზმი $P \otimes_R (R \otimes_S Q) \cong P \otimes_S Q$ დავაფიქსიროთ $p \in P$ მაშინ გვექნება ბიწრფივი ასახვა $f_p : R \times Q \to P \otimes_S Q$, $(r, q) \mapsto (rp) \otimes q$ მაშინ არსებობს ერთადერთი წრფივი ასახვა f-ი რომელიც შემდეგ დიაგრამას აკომუტირებს

$$\begin{tikzcd}
R \times Q \arrow[r] \arrow[d, "f_p"'] & R \otimes_S Q \arrow[dl, dotted, "f'_p"] \\
P \otimes_S Q &
\end{tikzcd}$$

ეს ასახვა R-მოდულების ჰომომორფიზმია $f'_p(r'(r \otimes q)) = f'_p(r'r \otimes q) = (r'rp) \otimes q = r'((rp) \otimes q) = r'f'_p(r \otimes q)$ ავიღოთ ბიწრფივი ასახვა $f : P \times (R \otimes_S Q) \to P \otimes_S Q$, $(p, \sum r_i \otimes q_i) \mapsto f'_p(\sum r_i \otimes q_i) = \sum (r_i p) \otimes q_i$ ავიღოთ მისი შესაბამისი წრფივი ასახვა

$$\begin{tikzcd}
P \times (R \otimes_S Q) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & P \otimes_R (R \otimes_S Q) \arrow[dl, dotted, "f'"] \\
P \otimes_S Q &
\end{tikzcd}$$

f' ელემენტებზე მოქმედებს შემდეგნაირად $p \otimes (\sum r_i \otimes q_i) \mapsto \sum (r_i p) \otimes q_i$ ადვილი სანახავია რომ ეს R-მოდულების ჰომომორფიზმიცაა. ეს ასახვები აკმაყოფილებენ შემდეგ ტოლობებს $g'f'(p \otimes (\sum r_i \otimes q_i)) = g'(\sum (r_i p) \otimes q_i) = \sum (r_i p) \otimes (1 \otimes q_i) = \sum p \otimes (r_i \otimes q_i) = p \otimes (\sum r_i \otimes q_i)$ და $f'g'(p \otimes q) = f'(p \otimes (1 \otimes q)) = p \otimes q$ ანუ გვაქვს $g'f' = id_{P \otimes_R (R \otimes_S Q)}$ და $f'g' = id_{P \otimes_S Q}$. ამ ყველაფრის გათვალისწინებით ეს მოდულები იზომორფულებია როგორც S-მოდულები და ასევე როგორც R-მოდულები.

მიღებული შედეგის გამოყენებით მივიღებთ სასურველ შედეგს $tr((P-Q)res(P'-Q')) = tr((P-Q)(res(P')-res(Q'))) = tr(Pres(P')+Qres(Q')-Pres(Q')-Qres(P')) = tr(Pres(P'))+tr(Qres(Q'))-tr(Pres(Q'))-tr(Qres(P')) = tr(P)P'+tr(Q)Q'-tr(P)Q'-tr(Q)P' = (tr(P)-tr(Q))P'-(tr(P)-tr(Q))Q' = tr(P-Q)(P'-Q')$

წინადადება 9.4 *ასახვა პროექციული მოდულებიდან თავისთავში $P(R) \to P(R)$, $P \mapsto R \otimes_S i^*P$ გვაძლევს ფუნქტორს.*

დამტკიცება. განვსაზღვროთ მისი მოქმედება მოდულების ჰომომორფიზმებზე. მოცემულია $f: P \to Q$ ეს გაგვიჩენს ბიწრფივ ასახვას $R \times i^*P \to R \otimes_S i^*Q$, $(r,p) \mapsto r \otimes f(p)$. რაც მოგვცემს შემდეგ წრფივ ასახვას $f_*: R \otimes_S i^*P \to R \otimes_S i^*Q$, $r \otimes p \mapsto r \otimes f(p)$. რომელიც აკმაყოფილებს თვისებებს $(gf)_* = g_*f_*$ და $(id_P)_* = id_{R\otimes_S i^*P}$.

წინადადება 9.5 *ასახვა პროექციული მოდულებიდან თავისთავში $P(R) \to P(R)$, $P \mapsto P \oplus \tau^*P$ გვაძლევს ფუნქტორს.*

დამტკიცება. განვსაზღვროთ მისი მოქმედება მოდულების ჰომომორფიზმებზე. მოცემულია $f: P \to Q$ ეს გაგვიჩენს წრფივ ასახვას $f_\#: P \oplus \tau^*P \to Q \oplus \tau^*Q$, $(p,p') \mapsto (f(p), f(p'))$ და კმაყოფილდება იგივეობები $(gf)_\# = g_\# f_\#$ და $(id_P)_\# = id_{P\oplus\tau^*P}$.

წინადადება 9.6 *წრფივი ასახვების ოჯახი $\mu_P: R \otimes_S i^*P \to P \oplus \tau^*P$, $r \otimes p \mapsto (rp, \tau(r)p)$ არის ბუნებრივი გარდაქმნა მოცემული ორი ფუნქტორისთვის პროექციული R-მოდულების პროექციულ R-მოდულებში.*

დამტკიცება. სასურველი ასახვა $\mu_P: R \otimes_S i^*P \to P \oplus \tau^*P$, $r \otimes p \mapsto (rp, \tau(r)p)$ ჩნდება შემდეგი ბიწრფივი ასახვიდან $R \times i^*P \to P \oplus \tau^*P$, $(r,p) \mapsto (rp, \tau(r)p)$ ბიწრფივობა გამომდინარეობს ფაქტიდან რომ $\forall s \in S$ $\tau(s) = s$. ასევე ეს ასახვა გამოდის R-მოდულების ჰომომორფიზმი $\mu_P(r'(r \otimes p)) = \mu_P(r'r \otimes p) = (r'rp, \tau(r'r)p) = (r'rp, \tau(r')\tau(r)p) = r'(rp, \tau(r)p) = r'\mu_P(r \otimes p)$. იმის საჩვენებლად რომ ეს ბუნებრივი გარდაქმნაა უნდა შევამოწმოთ მოცემული $f: P \to Q$-სთვის შემდეგი დიაგრამის კომუტაციურობა

$$\begin{tikzcd} R \otimes_S i^*P \arrow[r, "\mu_P"] \arrow[d, "f_*"'] & P \oplus \tau^*P \arrow[d, "f_\#"'] \\ R \otimes_S i^*Q \arrow[r, "\mu_Q"] & Q \oplus \tau^*Q \end{tikzcd}$$

რაც გამომდინარეობს შემდეგი კვადრატიდან:

$$\begin{tikzcd} r \otimes p \arrow[r, mapsto, "\mu_P"] \arrow[d, mapsto, "f_*"'] & (rp, \tau(r)p) \arrow[d, mapsto, "f_\#"'] \\ r \otimes f(p) \arrow[r, mapsto, "\mu_Q"] & (rf(p), \tau(r)f(p)) \end{tikzcd}$$

წინადადება 9.7 *ასახვა* $\mu_P : R \otimes_S i^*R^n \to R^n \oplus \tau^*R^n$ *არის იზომორფიზმი.*

დამტკიცება. რადგან გვაქვს გალუას გაფართოება ვიცით რომ $R \otimes_S R \cong R^{(C_2)} = R \oplus R$ *ამის გათვალისწინებით გვექნება იზომორფიზმი* $R \otimes_S i^*R^n \cong R \otimes_S (i^*R)^n \cong R \otimes_S i^*R \oplus ... \oplus R \otimes_S i^*R \cong R \otimes_S R \oplus ... \oplus R \otimes_S R \cong (R \oplus R)^n \cong (R \oplus \tau^*R)^n \cong R^n \oplus \tau^*R^n$ *ეს იზომორფიზმი ელემენტებზე ასე მოიცემა* $f : r \otimes (r_i)_{i\in\{1,2,...,n\}} \mapsto (r \otimes r_i)_{i\in\{1,2,...,n\}} \mapsto ((rr_i, r\tau(r_i)))_{i\in\{1,2,...,n\}} \mapsto ((rr_i, \tau(r)r_i))_{i\in\{1,2,...,n\}} \mapsto ((rr_i)_{i\in\{1,2,...,n\}}, (\tau(r)r_i)_{i\in\{1,2,...,n\}})$.

წინადადება 9.8 *ასახვა* $\mu_P : R \otimes_S i^*P \to P \oplus \tau^*P$ *არის იზომორფიზმი ნებისმიერი სარულად წარმოქმნილი პროექციული მოდული* P*-სთვის.*

დამტკიცება. ნებისმიერი სასრულად წარმოქმნილი P *არის სასრულად წარმოქმნილი თავისუფალი მოდულის რეტრაქტი*

$$P \underset{j}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} R^n$$

სადაც $\pi j = id_P$ *მაშინ გვექნება:*

$$R \otimes_S i^*P \underset{j_*}{\overset{\pi_*}{\leftrightarrows}} R \otimes_S i^*R^n$$

სადაც $\pi_* j_* = (\pi j)_* = (id_P)_* = id_{R\otimes_S i^*P}$ *ასევე:*

$$P \oplus \tau^*P \underset{j_\#}{\overset{\pi_\#}{\leftrightarrows}} R^n \oplus \tau^*R^n$$

სადაც $\pi_\# j_\# = (\pi j)_\# = (id_P)_\# = id_{P\oplus\tau^*P}$. *შემდეგი კომუტაციური დიაგრამიდან გამომდინარე:*

$$\begin{tikzcd} R \otimes_S i^*R^n \arrow[r, "\mu_{R^n}"] \arrow[d, shift right, "\pi_*"'] & R^n \oplus \tau^*R^n \arrow[d, shift right, "\pi_\#"'] \\ R \otimes_S i^*P \arrow[r, "\mu_P"] \arrow[u, shift right, "j_*"'] & P \oplus \tau^*P \arrow[u, shift right, "j_\#"'] \end{tikzcd}$$

გვაქვს რომ μ_P *არის იზომორფიზმი* μ_{R^n}*-ს რეტრაქტი. იზომორფიზმის რეტრაქტი კი იზომორფიზმია რაც ამტკიცებს სასურველ შედეგს.*

წინადადება 9.9 $res(tr(a)) = a + \bar{a}$

დამტკიცება. შეგვიძლია დავთვალოთ ზოგადი წევრისთვის $res(tr(P - Q)) = res(tr(P)) - res(tr(Q)) = P + \overline{P} - Q - \overline{Q} = P - Q + \overline{P - Q}$.

10 ნორმა და მისი თვისებები სასრულად წარმოქმნილ პროექციულ მოდულთა ნახევარრგოლზე $N : P(R) \to P(S)$

განმარტება 10.1 *განვმარტოთ $N : P(R) \to P(S)$ ამისთვის შემოვიღოთ $C_2 = \{1, \tau\}$-ს მოქმედება მოდულ $P \otimes_R \tau^* P$-ზე $\tau : p \otimes q \mapsto q \otimes p$ ცხადია ის შეესაბამება ბიწრფივ ასახვას ამიტომ გავრცელდება ტენზორულ ნამრავლზე ამასთანავე $\tau\tau = 1$ ამის გამო ის იზომორფიზმია და გვაქვს ჯგუფის მოქმედება. $N(P)$ განვმარტოთ როგორც $(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$.*

წინადადება 10.1 *$(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ არის S-მოდული*

დამტკიცება. ვთქვათ $\tau(a) = a$ და $\tau(b) = b$ მაშინ ცხადია გვაქვს შემდეგი ტოლობა $\tau(a + b) = \tau(a) + \tau(b) = a + b$ ახლა თუ ავიღებთ ნებისმიერ S-ის ელემენტს $\forall s \in S$ და ტენზორული ნამრავლის ფიქსირებულ წევრს $\tau(\sum p_i \otimes q_i) = \sum p_i \otimes q_i$ გვექნება შემდეგი ტოლობა $\tau(s(\sum p_i \otimes q_i)) = \tau(\sum (sp_i) \otimes q_i) = \sum q_i \otimes (sp_i) = \sum \tau(s)(q_i \otimes p_i) = s(\sum q_i \otimes p_i) = s(\sum p_i \otimes q_i)$ ასევე ცხადია რომ $\tau(0) = 0$ ამ ყველაფრიდან გამომდინარე $(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ S-მოდულია.

წინადადება 10.2 *$((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2} \cong P \otimes_R \tau^* Q$ სადაც ჯგუფის მოქმედება მოდულზე მოიცემა შემდეგნაირად $(p \otimes q, q' \otimes p') \mapsto (p' \otimes q', q \otimes p)$.*

დამტკიცება. გვაქვს შემდეგი პროექცია პირველ კომპონენტზე პირდაპირი ჯამის $(P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P) \to P \otimes_R \tau^* Q$ მისი შეზღუდვა მოდულის ფიქსირებულ ნაწილზე იყოს $f : ((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2} \to P \otimes_R \tau^* Q$ რომელიც ასევე S-მოდულების ჰომომორფიზმია. გვაქვს ორი ასახვა $id : P \otimes_R \tau^* Q \to P \otimes_R \tau^* Q$ და $P \otimes_R \tau^* Q \to Q \otimes_R \tau^* P$ ეს ბოლო ასახვა მოიცემა როგორც შემდეგი ორი ჯგუფთა ჰომომორფიზმის კომპოზიცია

$$\begin{tikzcd}
\tau^*(P \otimes_R \tau^* Q) \arrow[d] & P \otimes_R \tau^* Q \arrow[l] \arrow[dl, "g"] \\
Q \otimes_R \tau^* P &
\end{tikzcd}$$

ის ელემენტზე მოქმედებს შემდეგნაირად $g : \sum p_i \otimes q_i \mapsto \sum q_i \otimes p_i$. მაშინ ადიტიურობა ცხადია ასევე ეს S-მოდულების ჰომომორფიზმია რადგან $g(s(\sum p_i \otimes q_i)) = g(\sum (sp_i) \otimes q_i) = \sum q_i \otimes (sp_i) = \sum \tau(s)(q_i \otimes p_i) = \tau(s)(\sum q_i \otimes p_i) = s(\sum q_i \otimes p_i) = sg(\sum p_i \otimes q_i)$. ეს ორი ასახვა გვიჩენს S-მოდულების ჰომომორფიზმს $P \otimes_R \tau^* Q \to (P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P)$, $\sum p_i \otimes q_i \mapsto (\sum p_i \otimes q_i, \sum q_i \otimes p_i)$ ცხადია რომ $(\sum p_i \otimes q_i, \sum q_i \otimes p_i) \in ((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2}$ ამიტომ გვიჩნდება შემდეგი S-მოდულების ჰომომორფიზმი $h : P \otimes_R \tau^* Q \to ((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2}$, $\sum p_i \otimes q_i \mapsto (\sum p_i \otimes q_i, \sum q_i \otimes p_i)$. რადგან მოდულის ფიქსირებული ნაწილის ნებისმიერი ელემენტი ცალსახად განისაზღვრება პირველი კომპონენტით გვაქვს ტოლობები $hf((\sum p_i \otimes q_i, \sum q_i \otimes p_i)) =$

$h(\sum p_i \otimes q_i) = (\sum p_i \otimes q_i, \sum q_i \otimes p_i)$ და $fh(\sum p_i \otimes q_i) = f((\sum p_i \otimes q_i, \sum q_i \otimes p_i)) = \sum p_i \otimes q_i$ ანუ გვაქვს ტოლობები $hf = id_{((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2}}$ და $fh = id_{P \otimes_R \tau^* Q}$ რომლებიც ამტკიცებენ S-მოდულების იზომორფიზმს $((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2} \cong P \otimes_R \tau^* Q$.

წინადადება 10.3 *$(R^n \otimes_R \tau^* R^n)^{C_2} \cong R^{\frac{n(n-1)}{2}} \oplus S^n$ და ეს იზომორფიზმი ელემენტებზე მოიცემა შემდეგნაირად:*

$$\sum_j (r_1^j, ..., r_n^j) \otimes (t_1^j, ..., t_n^j) \mapsto \sum_j (\tau(r_1^j) t_2^j, ..., \tau(r_1^j) t_n^j, \tau(r_2^j) t_3^j, ..., \tau(r_2^j) t_n^j, ..., \tau(r_{n-1}^j) t_n^j, r_1^j \tau(t_1^j), ..., r_n^j \tau(t_n^j))$$

დამტკიცება. ჯერ დავთვალოთ $R \otimes_R \tau^* R$. რადგან ნებისმიერ ელემენტს აქვს სახე $r \otimes 1$ ჯგუფის მოქმედება აფიქსირებს ელემენტს თუ $\tau(r \otimes 1) = 1 \otimes r = \tau(r) \otimes 1 = r \otimes 1$ ეს კი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $r = \tau(r)$ ეს კი იგივეა რაც $r \in S$ აქედან გამომდინარე გვაქვს იზომორფიზმი $(R \otimes_R \tau^* R)^{C_2} \cong S$. ახლა დავთვალოთ ზოგადი თავისუფალი მოდულისთვის $(R^n \otimes_R \tau^* R^n)^{C_2} \cong ((R \oplus R^{n-1}) \otimes_R (\tau^* R \oplus \tau^* R^{n-1}))^{C_2} \cong (R \otimes_R \tau^* R)^{C_2} \oplus (R^{n-1} \otimes_R \tau^* R^{n-1})^{C_2} \oplus ((R \otimes_R \tau^* R^{n-1}) \oplus (R^{n-1} \otimes_R \tau^* R))^{C_2}$ სადაც ჯგუფის მოქმედებები მოიცემა შემდეგნაირად პირველ წევრში $r \otimes r' \mapsto r' \otimes r$ მეორე წევრში $(r_1, ..., r_{n-1}) \otimes (r'_1, ..., r'_{n-1}) \mapsto (r'_1, ..., r'_{n-1}) \otimes (r_1, ..., r_{n-1})$ ხოლო მესამე წევრში $(r \otimes (r_1, ..., r_{n-1}), (r'_1, ..., r'_{n-1}) \otimes r') \mapsto (r' \otimes ((r'_1, ..., r'_{n-1}), (r_1, ..., r_{n-1}) \otimes r)$. ცხადია გვაქვს იზომორფიზმი $((R \otimes_R \tau^* R^{n-1}) \oplus (R^{n-1} \otimes_R \tau^* R))^{C_2} \cong R \otimes_R \tau^* R^{n-1} \cong R^{n-1}$ ამ ყველაფრიდან გამომდინარე ვიღებთ შემდეგ რეკურსიულ თანადობას $(R^n \otimes_R \tau^* R^n)^{C_2} \cong (R^{n-1} \otimes_R \tau^* R^{n-1})^{C_2} \oplus R^{n-1} \oplus S$ ამ ყველაფრიდან გამომდინარე ვიღებთ იზომორფიზმს $(R^n \otimes_R \tau^* R^n)^{C_2} \cong R^{\frac{n(n-1)}{2}} \oplus S^n$.

ელემენტებზე ეს იზომორფიზმი მოიცემა შემდეგი ასახვების ჯაჭვით:

$$\sum_j (r_1^j, ..., r_n^j) \otimes (t_1^j, ..., t_n^j) \mapsto \sum_j (r_1^j \otimes t_1^j, r_1^j \otimes (t_2^j, ..., t_n^j), (r_2^j, ..., r_n^j) \otimes (t_2^j, ..., t_n^j)) \mapsto$$
$$\mapsto \sum_j (r_1^j \otimes t_1^j, (\tau(r_1^j) t_2^j, ..., \tau(r_1^j) t_n^j), (r_2^j, ..., r_n^j) \otimes (t_2^j, ..., t_n^j)) \mapsto ... \mapsto$$
$$\mapsto \sum_j (r_1^j \otimes t_1^j, ..., r_n^j \otimes t_n^j, (\tau(r_1^j) t_2^j, ..., \tau(r_1^j) t_n^j), ..., (\tau(r_{n-2}^j) t_{n-1}^j, \tau(r_{n-2}^j) t_n^j), \tau(r_{n-1}^j) t_n^j) \mapsto$$
$$\mapsto \sum_j (\tau(r_1^j) t_2^j, ..., \tau(r_1^j) t_n^j, \tau(r_2^j) t_3^j, ..., \tau(r_2^j) t_n^j, ..., \tau(r_{n-1}^j) t_n^j, r_1^j \tau(t_1^j), ..., r_n^j \tau(t_n^j))$$

წინადადება 10.4 *$(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ არის სასრულად წარმოქმნილი პროექციულ S-მოდული*

დამტკიცება. წინა გამოთვლების გათვალისწინებით ეს ცხადია როდესაც მოცემული მოდული სასრულად წარმოქმნილი თავისუფალია. ნებისმიერი სასრულად წარმოქმნილი პროექციული კი არის სასრულად წარმოქმნილი თავისუფალის რეტრაქტი ანუ გვაქვს ასახვები

$$P \underset{j}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} F$$

და ისინი აკმაყოფილებენ შემდეგ ტოლობას $\pi j = id_P$. ეს ასახვები კი გაგვიჩენენ შემდეგ ბიწრფივ ასახვებს $P \times \tau^* P \to F \otimes_R \tau^* F$, $(p, q) \mapsto j(p) \otimes j(q)$ და $F \times \tau^* F \to P \otimes_R \tau^* P$, $(a, b) \mapsto \pi(a) \otimes \pi(b)$ ტენზორული ნამრავლის უნივერსალური თვისებით ვიღებთ ამ წრფივი ასახვების შესაბამის R-მოდულების ჰომომორფიზმებს $j' : P \otimes_R \tau^* P \to F \otimes_R \tau^* F$ და $\pi' : F \otimes_R \tau^* F \to P \otimes_R \tau^* P$. ეს

ჰომომორფიზმები აკმაყოფილებენ შემდეგ ტოლობებს როდესაც $\sum p_i \otimes q_i \in (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ მაშინ $\tau(j'(\sum p_i \otimes q_i)) = \tau(\sum j(p_i) \otimes j(q_i)) = \sum j(q_i) \otimes j(p_i) = j'(\sum q_i \otimes p_i) = j'(\sum p_i \otimes q_i)$ და როდესაც $\sum a_i \otimes b_i \in (F \otimes_R \tau^* F)^{C_2}$ გვაქვს ტოლობა $\tau(\pi'(\sum a_i \otimes b_i)) = \tau(\sum \pi(a_i) \otimes \pi(b_i)) = \sum \pi(b_i) \otimes \pi(a_i) = \pi'(\sum b_i \otimes a_i) = \pi'(\sum a_i \otimes b_i)$. ამ ტოლობების გამო გვიჩნდება S-მოდულების ჰომომორფიზმები $j'' : (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \to (F \otimes_R \tau^* F)^{C_2}$ და $\pi'' : (F \otimes_R \tau^* F)^{C_2} \to (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ ეს ასახვები აკმაყოფილებენ თვისებას $\pi''(j''(\sum p_i \otimes q_i)) = \pi''(\sum j(p_i) \otimes j(q_i)) = \sum \pi j(p_i) \otimes \pi j(q_i) = \sum p_i \otimes q_i$ ამ ყველაფრის შეჯამებით ვიღებთ რომ გვაქვს

$$(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \underset{j''}{\overset{\pi''}{\rightleftarrows}} (F \otimes_R \tau^* F)^{C_2}$$

სადაც $\pi'' j'' = id_{(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}}$ რაც ნიშნავს რომ $(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ არის სასრულად წარმოქმნილი პროექციული S-მოდულის რეტრაქტი ანუ თვითონ არის სასრულად წარმოქმნილი პროექციული.

ჩვენ უკვე ვაჩვენეთ შემდეგი თვისებები $N(R) = S$, $N(0) = 0$ და ასევე ადვილი დასანახია რომ $N(\overline{P}) = N(P)$ სადაც $\overline{P} = \tau^* P$. საჩვენებელი დაგვრჩა შემდეგი თვისებები:

$((P \otimes_R Q) \otimes_R \tau^*(P \otimes_R Q))^{C_2} \cong (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \otimes_S (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2}$

$R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \cong P \otimes_R \tau^* P$

$((P \oplus Q) \otimes_R \tau^*(P \oplus Q))^{C_2} \cong (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \oplus (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2} \oplus i^*(P \otimes_R \tau^* Q)$

წინადადება 10.5 $((P \oplus Q) \otimes_R \tau^*(P \oplus Q))^{C_2} \cong (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \oplus (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2} \oplus i^*(P \otimes_R \tau^* Q)$

დამტკიცება. პირველ რიგში გვაქვს იზომორფიზმი $((P \oplus Q) \otimes_R \tau^*(P \oplus Q))^{C_2} \cong ((P \otimes_R \tau^* P) \oplus (Q \otimes_R \tau^* Q) \oplus (P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2}$ სადაც მარჯვენა მხარეზე ჯგუფის მოქმედება მოიცემა ელემენტებზე შემდეგნაირად $(\sum p_k \otimes p'_k, \sum q_l \otimes q'_l, \sum x_j \otimes y_j, \sum y'_n \otimes x'_n) \mapsto (\sum p'_k \otimes p_k, \sum q'_l \otimes q_l, \sum x'_j \otimes y'_j, \sum y_n \otimes x_n)$ რადგან ეს ჯგუფის მოქმედება ცალცალკე მოქმედებს პირველ, მეორე და დარჩენილ შესაკრებებზე გვაქვს შემდეგი იზომორფიზმი $((P \otimes_R \tau^* P) \oplus (Q \otimes_R \tau^* Q) \oplus (P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2} \cong (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \oplus (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2} \oplus ((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2}$ სადაც პირველ და მეორე შესაკრებზე ჯგუფი მოქმედებს როგორც $p \otimes p' \mapsto p' \otimes p$ ხოლო მესამე შესაკრებზე $(\sum p_m \otimes q_m, \sum q'_n \otimes p'_n) \mapsto (\sum p'_m \otimes q'_m, \sum q_n \otimes p_n)$ როგორც ვიცით ასეთ შემთხვევაში გვაქვს იზომორფიზმი $((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2} \cong i^*(P \otimes_R \tau^* Q)$ რაც გვაძლებს $(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \oplus (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2} \oplus ((P \otimes_R \tau^* Q) \oplus (Q \otimes_R \tau^* P))^{C_2} \cong (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \oplus (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2} \oplus i^*(P \otimes_R \tau^* Q)$ ამის შემდეგ ამ იზომორფიზმების კომპოზიცია გვაძლევს საძიებელ იზომორფიზმს.

დარჩენილი ორი იზომორფიზმის შემთხვევაში კი ჯერ ვაჩვენოთ ეს იზომორფიზმები სასრულად წარმოქმნილი თავისუფალი მოდულებისთვის და შემდეგ გამოვიყენოთ ის რომ იზომორფიზმის რეტრაქტი იზომორფიზმია.

წინადადება 10.6 *ასახვა სასრულად წარმოქმნილი პროექციული მოდულებიდან თავისთავში* $P(R) \to P(R)$, $P \mapsto P \otimes_R \tau^* P$ *გვაძლევს ფუნქტორს.*

დამტკიცება. განვსაზღვროთ მისი მოქმედება მოდულების ჰომომორფიზმებზე. მოცემულია $f : P \to Q$ *ეს გაგვიჩენს ბიწრფივ ასახვას* $P \times \tau^* P \to Q \otimes_R \tau^* Q$, $(p, p') \mapsto (f(p), f(p'))$ *და მის შესაბამის მოდულების ჰომომორფიზმს* $[f] : P \otimes_R \tau^* P \to Q \otimes_R \tau^* Q$ *ცხადია რომ კმაყოფილდება შემდეგი თვისებები* $[gf] = [g][f]$ *და* $[id_P] = id_{P \otimes_R \tau^* P}$.

წინადადება 10.7 *ასახვა პროექციული მოდულებიდან თავისთავში* $P(R) \to P(S)$, $P \mapsto (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ *გვაძლევს ფუნქტორს.*

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია მოდულების ჰომომორფიზმი $f : P \to Q$ *მაშინ როგორც უკვე ვნახეთ გვიჩნდება ასახვა* $[f] : P \otimes_R \tau^* P \to Q \otimes_R \tau^* Q$, $(p, p') \mapsto (f(p), f(p'))$ *ამ ასახვის შეზღუდვა ფიქსირებულ ნაწილზე მოგვცემს* S*-მოდულების ჰომომორფიზმს* $[f]|_{(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}} : (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \to (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2}$ *მართლაც როდესაც* $\sum p_j \otimes p'_j \in (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ *სრულდება შემდეგი ტოლობა* $\sum [f](p_j) \otimes [f](p'_j) = [f](\sum p_j \otimes p'_j) = [f](\sum p'_j \otimes p_j) = \sum [f](p'_j) \otimes [f](p_j)$ *ეს კი იგივეა რაც* $[f](\sum p_j \otimes p'_j) \in (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2}$. *ცხადია რომ ეს ფუნქტორია.*

წინადადება 10.8 *ასახვა პროექციული მოდულებიდან თავისთავში* $P(R) \to P(R)$, $P \mapsto R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$ *გვაძლევს ფუნქტორს.*

დამტკიცება. მართლაც რადგან ეს ორი ფუნქტორის კომპოზიციაა და ასახვებზე მოქმედებს შემდეგნაირად ვთქვათ მოცემულია მოდულების ჰომომორფიზმი $f : P \to Q$ *ეს გვაძლევს ასახვას* $< f >: R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \to R \otimes_S (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2}$ *მაშინ ეს* R*-მოდულების ჰომომორფიზმია. გვაქვს ტოლობები* $< gf >=< g >< f >$ *და* $< id_P >= id_{R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}}$.

წინადადება 10.9 *ასახვა პროექციული მოდულების წყვილებიდან პროექციულ მოდულებში* $P(R) \times P(R) \to P(R)$, $(P, Q) \mapsto ((P \otimes_R Q) \otimes_R \tau^*(P \otimes_R Q))^{C_2}$ *გვაძლევს ბიფუნქტორს.*

დამტკიცება. მართლაც ეს არის ბიფუნქტორი ტენზორული ნამრავლის კომპოზიცია უკვე ჩვენებულ ფუნქტორთან რაც გვაძლევს ბიფუნქტორს რომელიც ასახვებზე მოქმედებს შემდეგნაირად მოცემული ჰომომორფიზმებისთვის $f : P \to P'$ *და* $g : Q \to Q'$ *გვაქვს* S*-მოდულების ჰომომორფიზმი* $[f, g] : ((P \otimes_R Q) \otimes_R \tau^*(P \otimes_R Q))^{C_2} \to ((P' \otimes_R Q') \otimes_R \tau^*(P' \otimes_R Q'))^{C_2}$, $[f, g](\sum p_j \otimes q_j \otimes p'_j \otimes q'_j) = \sum f(p_j) \otimes g(q_j) \otimes f(p'_j) \otimes g(q'_j)$. *სრულდება შემდეგი ტოლობები* $[f'f, g'g] = [f', g'][f, g]$ *და* $[id_P, id_Q] = id_{((P \otimes_R Q) \otimes_R \tau^*(P \otimes_R Q))^{C_2}}$.

წინადადება 10.10 *ასახვა პროექციული მოდულების წყვილებიდან პროექციულ მოდულებში* $P(R) \times P(R) \to P(R)$, $(P, Q) \mapsto (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \otimes_S (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2}$ *გვაძლევს ბიფუნქტორს.*

დამტკიცება. ეს მართლაც ბიფუნქტორია რადგან წარმოადგენს ფუნქტორის და ბიფუნქტორის კომპოზიციას. ის ასახვებზე მოიცემა შემდეგნაირად ვთქვათ მოცემულია ორი წრფივი ასახვა $f : P \to P'$ და $g : Q \to Q'$ გვაძლევს შესაბამის წრფივ ასახვას $< f, g >: (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \otimes_S (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2} \to (P' \otimes_R \tau^* P')^{C_2} \otimes_S (Q' \otimes_R \tau^* Q')^{C_2}$, $(\sum p_j \otimes p'_j) \otimes (\sum q_j \otimes q'_j) \mapsto (\sum f(p_j) \otimes f(p'_j)) \otimes (\sum g(q_j) \otimes g(q'_j))$ და სრულდება ტოლობები $< f'f, g'g >=< f', g' >< f, g >$ და $< id_P, id_Q >= id_{(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \otimes_S (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2}}$.

წინადადება 10.11 *წრფივი ასახვების ოჯახი* $\eta_P : R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \to P \otimes_R \tau^* P$, $r \otimes (\sum p_j \otimes p'_j) \mapsto \sum r p_j \otimes p'_j$ *არის ბუნებრივი გარდაქმნა მოცემული ორი ფუნქტორისთვის პროექციული მოდულებიდან თავისთავში.*

დამტკიცება. დასაწყისისთვის ავიღოთ წრფივი ასახვა $id_{P \otimes_R \tau^* P}$ შემდეგ მისი შეზღუდვა $(P \otimes_R \tau^* P)^{C_2}$-ზე იყოს $u : (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \to P \otimes_R \tau^* P$ ეს ასახვა S-მოდულების ჰომომორფიზმია. აქედან გამომდინარე გვაქვს S-მოდულების ბიწრფივი ასახვა $R \times (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \to P \otimes_R \tau^* P$, $(r, \sum p_j \otimes p'_j) \mapsto \sum r p_j \otimes p'_j$ რაც გვაძლევს ტენზორული ნამრავლის უნივერსალური თვისებით ერთადერთ S-მოდულების ჰომომორფიზმს $\eta_P : R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \to P \otimes_R \tau^* P$, $r \otimes (\sum p_j \otimes p'_j) \mapsto \sum r p_j \otimes p'_j$ ადვილი სანახავია რომ ეს ასახვა ასევე არის R მოდულების ჰომომორფიზმი ვაჩვენოთ რომ ეს ჰომომორფიზმი ბუნებრივი გარდაქმნაა.

მოცემული R-მოდულების ჰომომორფიზმისთვის $f : P \to Q$ უნდა ვაჩვენოთ შემდეგი დიაგრამის კომუტაციურობა

$$\begin{tikzcd} R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \arrow[r, "\eta_P"'] \arrow[d, "<f>"] & P \otimes_R \tau^* P \arrow[d, "{[f]}"] \\ R \otimes_S (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2} \arrow[r, "\eta_Q"'] & Q \otimes_R \tau^* Q \end{tikzcd}$$

ეს კი გამომდინარეობს შემდეგი კვადრატიდან:

$$\begin{tikzcd} r \otimes (\sum p_j \otimes p'_j) \arrow[r, mapsto, "\eta_P"'] \arrow[d, mapsto, "<f>"] & \sum r p_j \otimes p'_j \arrow[d, mapsto, "{[f]}"] \\ r \otimes (\sum f(p_j) \otimes f(p'_j)) \arrow[r, mapsto, "\eta_Q"'] & \sum r f(p_j) \otimes f(p'_j) \end{tikzcd}$$

რაც ამტკიცებს სასურველ შედეგს.

წინადადება 10.12 *წრფივი ასახვების ოჯახი* $\varphi_{P,Q} : (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \otimes_S (Q \otimes_R \tau^* Q)^{C_2} \to ((P \otimes_R Q) \otimes_R \tau^*(P \otimes_R Q))^{C_2}$, $(\sum_j p_j \otimes p'_j) \otimes (\sum_l q_l \otimes q'_l) \mapsto \sum_{j,l} p_j \otimes q_l \otimes p'_j \otimes q'_l$ *არის ბუნებრივი გარდაქმნა მოცემული ორი ფუნქტორისთვის პროექციული R-მოდულების წყვილებიდან პროექციულ S-მოდულებში.*

დამტკიცება. დასაწყისისთვის ავაგოთ შემდეგი S-მოდულების ჰომომორფიზმი $(P\otimes_R \tau^*P)^{C_2}\otimes_S (Q\otimes_R \tau^*Q)^{C_2} \to (P\otimes_R Q)\otimes_R \tau^*(P\otimes_R Q)$ ამისთვის ავაგოთ მულტიწრფივი ასახვა $P\times\tau^*P\times Q\times\tau^*Q \to (P\otimes_R Q)\otimes_R\tau^*(P\otimes_R Q)$, $(p,p',q,q')\mapsto p\otimes q\otimes p'\otimes q'$ რაც მოგვცემს ტენზორული ნამრავლის უნივერსალობით შემდეგ წრფივ ასახვას $v: P\otimes_R\tau^*P\otimes_R Q\otimes_R\tau^*Q \to (P\otimes_R Q)\otimes_R \tau^*(P\otimes_R Q)$, $p\otimes p'\otimes q\otimes q'\mapsto p\otimes q\otimes p'\otimes q'$ ეს ასახვა დაგვეხმარება ძირითადი ასახვის აგებაში.

ავიღოთ ბიწრფივი ასახვა $(P\otimes_R \tau^*P)^{C_2}\times(Q\otimes_R \tau^*Q)^{C_2} \to (P\otimes_R Q)\otimes_R \tau^*(P\otimes_R Q)$, $(\sum_j p_j\otimes p'_j, \sum_l q_l\otimes q'_l)\mapsto \sum_{j,l} p_j\otimes q_l\otimes p'_j\otimes q'_l$ დასაწყისისთვის ვაჩვენოთ რომ ეს ასახვა სწორადაა განსაზღვრული ვთქვათ $(\sum_j p_j\otimes p'_j, \sum_l q_l\otimes q'_l) = (\sum_m x_m\otimes x'_m, \sum_n y_n\otimes y'_n)$ მაშინ ცხადია გვაქვს ტოლობა $\sum_{j,l} p_j\otimes p'_j\otimes q_l\otimes q'_l = (\sum_j p_j\otimes p'_j)\otimes(\sum_l q_l\otimes q'_l) = (\sum_m x_m\otimes x'_m)\otimes(\sum_n y_n\otimes y'_n) = \sum_{m,n} x_m\otimes x'_m\otimes y_n\otimes y'_n$ ტოლობის ორივე მხარეს თუ მოვდებთ v-ს მივიღებთ ტოლობას $\sum_{j,l} p_j\otimes q_l\otimes p'_j\otimes q'_l = v((\sum_j p_j\otimes p'_j)\otimes(\sum_l q_l\otimes q'_l)) = v((\sum_m x_m\otimes x'_m)\otimes(\sum_n y_n\otimes y'_n)) = \sum_{m,n} x_m\otimes y_n\otimes x'_m\otimes y'_n$ ეს ამტკიცებს რომ ასახვა სწორადაა განსაზღვრული ადვილი შესამოწმებელია რომ ის ბიწრფივი ასახვაა. ამ ბიწრფივი ასახვის შესაბამისი ერთადერთი წრფივი ასახვა არის ჩვენი საძიებელი ასახვა $\varphi'_{P,Q}: (P\otimes_R \tau^*P)^{C_2}\otimes_S (Q\otimes_R \tau^*Q)^{C_2} \to (P\otimes_R Q)\otimes_R \tau^*(P\otimes_R Q)$, $(\sum_j p_j\otimes p'_j)\otimes(\sum_l q_l\otimes q'_l)\mapsto \sum_{j,l} p_j\otimes q_l\otimes p'_j\otimes q'_l$ ამის შემდეგ ბუნებრივ გარდაქმნას მივიღებთ კოდომეინის შეზღუდვით ჯგუფის მოქმედებით ფიქსირებულ S-მოდულამდე. როდესაც $(\sum_j p_j\otimes p'_j)\otimes(\sum_l q_l\otimes q'_l)\in (P\otimes_R \tau^*P)^{C_2}\otimes_S (Q\otimes_R \tau^*Q)^{C_2}$ გვაქვს ტოლობები $\sum_j p_j\otimes p'_j = \sum_j p'_j\otimes p_j$ და $\sum_l q_l\otimes q'_l = \sum_l q'_l\otimes q_l$ საიდანაც ვიღებთ შემდეგ ტოლობებს $\tau(\sum_{j,l} p_j\otimes q_l\otimes p'_j\otimes q'_l) = \sum_{j,l} p'_j\otimes q'_l\otimes p_j\otimes q_l = \varphi'_{P,Q}((\sum_j p'_j\otimes p_j)\otimes(\sum_l q'_l\otimes q_l)) = \varphi'_{P,Q}((\sum_j p_j\otimes p'_j)\otimes(\sum_l q_l\otimes q'_l)) = \sum_{j,l} p_j\otimes q_l\otimes p'_j\otimes q'_l$ ამ ტოლობიდან გამომდინარე $Im(\varphi'_{P,Q}) \subset ((P\otimes_R Q)\otimes_R \tau^*(P\otimes_R Q))^{C_2}$ და შეგვიძლია კოდომეინის შეზღუდვა რომ მივიღოთ ჰომომორფიზმი $\varphi_{P,Q}: (P\otimes_R \tau^*P)^{C_2}\otimes_S (Q\otimes_R \tau^*Q)^{C_2} \to ((P\otimes_R Q)\otimes_R \tau^*(P\otimes_R Q))^{C_2}$, $(\sum_j p_j\otimes p'_j)\otimes(\sum_l q_l\otimes q'_l)\mapsto \sum_{j,l} p_j\otimes q_l\otimes p'_j\otimes q'_l$

ახლა ვაჩვენოთ რომ ეს ჰომომორფიზმი ბუნებრივი გარდაქმნაა. ამისთვის მოცემული ასახვებისთვის $f: P\to P'$ და $g: Q\to Q'$ უნდა ვაჩვენოთ შემდეგი დიაგრამის კომუტატიურობა

$$\begin{tikzcd}
(P\otimes_R \tau^*P)^{C_2}\otimes_S (Q\otimes_R \tau^*Q)^{C_2} \arrow[r, "\varphi_{P,Q}"'] \arrow[d, "<f,g>"] & ((P\otimes_R Q)\otimes_R \tau^*(P\otimes_R Q))^{C_2} \arrow[d, "{[f,g]}"] \\
(P'\otimes_R \tau^*P')^{C_2}\otimes_S (Q'\otimes_R \tau^*Q')^{C_2} \arrow[r, "\varphi_{P',Q'}"'] & ((P'\otimes_R Q')\otimes_R \tau^*(P'\otimes_R Q'))^{C_2}
\end{tikzcd}$$

რაც გამომდინარეობს შემდეგი კომუტაციური კვადრატიდან

$$\begin{tikzcd}
(\sum_j p_j\otimes p'_j)\otimes(\sum_l q_l\otimes q'_l) \arrow[r, mapsto, "\varphi_{P,Q}"'] \arrow[d, mapsto, "<f,g>"] & \sum_{j,l} p_j\otimes q_l\otimes p'_j\otimes q'_l \arrow[d, mapsto, "{[f,g]}"] \\
(\sum_j f(p_j)\otimes f(p'_j))\otimes(\sum_l g(q_l)\otimes g(q'_l)) \arrow[r, mapsto, "\varphi_{P',Q'}"'] & \sum_{j,l} f(p_j)\otimes g(q_l)\otimes f(p'_j)\otimes g(q'_l)
\end{tikzcd}$$

წინადადება 10.13 *თუ მოცემულია თავისუფალი R-მოდულები $F \cong R^m$ და $K \cong R^n$ მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ S-მოდულების იზომორფიზმს $(F\otimes_R \tau^* R)\otimes_S (K\otimes_R \tau^* K)^{C_2} \cong (F\otimes_R K)\otimes_R \tau^*(R\otimes_R K)$ რომელიც ელემენტებზე მოქმედებს როგორც $(\sum_l f_l\otimes r_l)\otimes(\sum_j k_j\otimes k'_j) \mapsto \sum_{l,j}(f_l\otimes k_j)\otimes(r_l\otimes k'_j)$.*

დამტკიცება. გვაქვს იზომორფიზმების ჯაჭვი:

$(F\otimes_R \tau^* R)\otimes_S (K\otimes_R \tau^* K)^{C_2} \cong F\otimes_S (K\otimes_R \tau^* K)^{C_2} \cong F\otimes_S (R^{\frac{n(n-1)}{2}} \oplus S^n) \cong (F\otimes_S R^{\frac{n(n-1)}{2}})\oplus (F\otimes_S S^n) \cong (R\otimes_S R)\oplus...\oplus(R\otimes_S R)\oplus F^n \cong F\otimes_R R^{n^2} \cong F\otimes_R K\otimes_R \tau^* K \cong F\otimes_R K\otimes_R \tau^*(R\otimes_R K)$

რომლებიც ელემენტებზე მოქმედებენ შემდეგნაირად:

$(f\otimes r)\otimes(\sum k_j\otimes k'_j) \mapsto f\tau(r)\otimes(\sum k_j\otimes k'_j) = f\tau(r)\otimes(\sum_j (r_1^j,...,r_n^j)\otimes(t_1^j,...,t_n^j)) \mapsto$

$f\tau(r)\otimes\sum_j(\tau(r_1^j)t_2^j,...,\tau(r_1^j)t_n^j,\tau(r_2^j)t_3^j),...,\tau(r_2^j)t_n^j,...,\tau(r_{n-1}^j)t_n^j, r_1^j\tau(t_1^j),...,r_n^j\tau(t_n^j)) \mapsto$

$\sum_j(f\tau(r)\tau(r_1^j)t_2^j, f\tau(r)r_1^j\tau(t_2^j),...,f\tau(r)\tau(r_{n-1}^j)t_n^j, f\tau(r)r_{n-1}^j\tau(t_n^j), f\tau(r)r_1^j\tau(t_1^j),...,f\tau(r)r_n^j\tau(t_n^j))$

$\mapsto f\tau(r)\otimes(\sum_j(\tau(r_1^j)t_2^j, r_1^j\tau(t_2^j),...,\tau(r_{n-1}^j)t_n^j, r_{n-1}^j\tau(t_n^j), r_1^j\tau(t_1^j),...,r_n^j\tau(t_n^j))) \mapsto$

$f\tau(r)\otimes(\sum_j(r_1^j,...,r_n^j)\otimes(t_1^j,...,t_n^j)) \mapsto \sum_j(f\otimes k_j)\otimes(r\otimes k'_j)$

ამ გადასვლების ჯაჭვში ბოლოს წინა გადასვლა სამართლიანია რადგან მისი შექცეული ასახვაა $f: K\otimes_R \tau^* K \to R^{n^2}$ და სრულდება ტოლობა $\sum k_j\otimes k'_j = \sum k'_j\otimes k_j$ ამიტომ $f(\sum k_j\otimes k'_j) = f(\sum k'_j\otimes k_j)$ ეს კი იგივეა რაც $\sum_j(r_1^j\tau(t_2^j), r_2^j\tau(t_1^j),...,r_{n-1}^j\tau(t_n^j), r_n^j\tau(t_{n-1}^j), r_1^j\tau(t_1^j),...,r_n^j\tau(t_n^j)) = \sum_j(t_1^j\tau(r_2^j), t_2^j\tau(r_1^j),...,t_{n-1}^j\tau(r_n^j), t_n^j\tau(r_{n-1}^j), t_1^j\tau(r_1^j),...,t_n^j\tau(r_n^j))$ ხოლო რადგან აქ ჯამი არის კომპონენტების მიხედვით და ასევე ტოლობაც კომპონენტების მიხედვით გვაქ გვიჩნდება ტოლობა $f(\sum k_j\otimes k'_j) = \sum_j(\tau(r_1^j)t_2^j, r_1^j\tau(t_2^j),...,\tau(r_{n-1}^j)t_n^j, r_{n-1}^j\tau(t_n^j), r_1^j\tau(t_1^j),...,r_n^j\tau(t_n^j))$

შესაბამისად ეს ასახვა ზოგად ელემენტზე მოქმედებს შემდეგნაირად $(\sum_l f_l\otimes r_l)\otimes(\sum_j k_j\otimes k'_j) \mapsto \sum_{l,j}(f_l\otimes k_j)\otimes(r_l\otimes k'_j)$.

წინადადება 10.14 *წრფივი ასახვა $\varphi_{F,K}: (F\otimes_R \tau^* F)^{C_2}\otimes_S (K\otimes_R \tau^* K)^{C_2} \to ((F\otimes_R K)\otimes_R \tau^*(F\otimes_R K))^{C_2}$, $(\sum_j f_j\otimes f'_j)\otimes(\sum_l k_l\otimes k'_l) \mapsto \sum_{j,l} f_j\otimes k_l\otimes f'_j\otimes k'_l$ არის იზომორფიზმი როდესაც F და K თავისუფალი R-მოდულებია.*

დამტკიცება. დასაწყისისთვის ვთქვათ $F\cong K\cong R$ ამ შემთხვევაში გვაქვს იზომორფიზმი $(R\otimes_R \tau^* R)^{C_2}\otimes_S (R\otimes_R \tau^* R)^{C_2} \cong S\otimes_S S \cong S \cong ((R\otimes_R R)\otimes_R \tau^*(R\otimes_R R))^{C_2}$ ეს იზომორფიზმბი ელემენტებზე მოიცემა როგორც $(r\otimes r')\otimes(t\otimes t') \mapsto r\tau(r')\otimes t\tau(t') \mapsto r\tau(r')t\tau(t') \mapsto r\otimes t\otimes r'\otimes t'$ ამ შემთხვევაში ეს იზომორფიზმი ემთხვევა $\varphi_{R,R}$-ს

ახლა ფიქსირებული თავისუფალი მოდული K-სთვის დავუშვათ რომ $F\cong R^n$ და როდესაც თავისუფალი მოდული L-ის განზომილება ნაკლებია ან ტოლია n-ზე შემდეგი ასახვა იზომორფიზმია $\varphi_{L,K}$ ახლა ვაჩვენოთ რომ $\varphi_{F\oplus R,K}: ((F\oplus R)\otimes_R \tau^*(F\oplus R))^{C_2}\otimes_S (K\otimes_R \tau^* K)^{C_2} \to (((F\oplus R)\otimes_R K)\otimes_R \tau^*((F\oplus R)\otimes_R K))^{C_2}$ იზომორფიზმია. გვაქვს იზომორფიზმები $((F\oplus R)\otimes_R \tau^*(F\oplus R))^{C_2}\otimes_S (K\otimes_R \tau^* K)^{C_2} \cong ((F\otimes_R \tau^* F)^{C_2}\otimes_S (K\otimes_R \tau^* K)^{C_2}) \oplus ((R\otimes_R \tau^* R)^{C_2}\otimes_S (K\otimes_R$

$\tau^*K)^{C_2})\oplus((F\otimes_R\tau^*R)\otimes_S(K\otimes_R\tau^*K)^{C_2})\cong((F\otimes_R K)\otimes_R\tau^*(F\otimes_R K))^{C_2}\oplus((R\otimes_R K)\otimes_R\tau^*(R\otimes_R K))^{C_2}\oplus((F\otimes_R K)\otimes_R\tau^*(R\otimes_R K))\cong(((F\otimes_R K)\oplus(R\otimes_R K))\otimes_R\tau^*((F\otimes_R K)\oplus(R\otimes_R K))^{C_2}\cong(((F\oplus R)\otimes_R K)\otimes_R\tau^*((F\oplus R)\otimes_R K))^{C_2}$

ეს იზომორფიზმების ჯაჭვი ელემენტებზე მოიცემა შემდეგნაირად:

$(\sum_l(f_l,r_l)\otimes(f'_l,r'_l))\otimes(\sum_j k_j\otimes k'_j)\mapsto((\sum_l f_l\otimes f'_l)\otimes(\sum_j k_j\otimes k'_j),(\sum_l r_l\otimes r'_l)\otimes(\sum_j k_j\otimes k'_j),(\sum_l f_l\otimes r'_l)\otimes(\sum_j k_j\otimes k'_j))\mapsto(\sum_{l,j} f_l\otimes k_j\otimes f'_l\otimes k'_j,\sum_{l,j} r_l\otimes k_j\otimes r'_l\otimes k'_j,\sum_{l,j} f_l\otimes k_j\otimes r'_l\otimes k'_j)\mapsto\sum_{l,j}(f_l,r_l)\otimes k_j\otimes(f'_l,r'_l)\otimes k'_j$

მეორე გადასვლა მოიცემა პირველ ორ კომპონენტში დაშვებით ხოლო მესამე კომპონენტში უკვე მიღებული შედეგიდან. საბოლოოდ ეს იზომორფიზმი ემთხვევა ასახვას $\varphi_{F\oplus R,K}:((F\oplus R)\otimes_R\tau^*(F\oplus R))^{C_2}\otimes_S(K\otimes_R\tau^*K)^{C_2}\to(((F\oplus R)\otimes_R K)\otimes_R\tau^*((F\oplus R)\otimes_R K))^{C_2}$.

ამის შემდეგ შეგვიძლია ანალოგიურად დავაფიქსიროთ F*-ი და ვცვალოთ* K *საბოლოოდ ინდუქციით მივიღებთ რომ ეს ასახვა იზომორფიზმია თავისუფალი მოდულების შემთხვევაში.*

წინადადება 10.15 $((P\otimes_R Q)\otimes_R\tau^*(P\otimes_R Q))^{C_2}\cong(P\otimes_R\tau^*P)^{C_2}\otimes_S(Q\otimes_R\tau^*Q)^{C_2}$

დამტკიცება. რადგან P *და* Q *არიან სასრულად წარმოქმნილი პროექციულები ისინი იქნებიან სასრულად წარმოქმნილი თავისუფლების* F*-ის და* K*-ს რეტრაქტები ანუ გვაქვს ასახვები*

$$P\underset{j}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}}F\qquad Q\underset{l}{\overset{t}{\leftrightarrows}}K$$

ისეთები რომ $\pi j=id_P$ *და* $tl=id_Q$ *ეს ასახვები გვიჩენენ შემდეგ ასახვებს*

$$((P\otimes_R Q)\otimes_R\tau^*(P\otimes_R Q))^{C_2}\underset{[j,l]}{\overset{[\pi,t]}{\leftrightarrows}}((F\otimes_R K)\otimes_R\tau^*(F\otimes_R K))^{C_2}$$

$$(P\otimes_R\tau^*P)^{C_2}\otimes_S(Q\otimes_R\tau^*Q)^{C_2}\underset{<j,l>}{\overset{<\pi,t>}{\leftrightarrows}}(F\otimes_R\tau^*F)^{C_2}\otimes_S(K\otimes_R\tau^*K)^{C_2}$$

და როგორც ვიცით ეს ასახვები აკმაყოფილებენ ტოლობებს $[\pi,t][j,l]=[\pi j,tl]=[id,id]=id$ *და ანალოგიურად* $<\pi,t><j,l>=<\pi j,tl>=<id,id>=id$.

როგორც ვიცით გვაქვს ბუნებრივი ასახვა φ *რომელიც აკომუტირებს შემდეგ დიაგრამას:*

$$\begin{tikzcd}
(P\otimes_R\tau^*P)^{C_2}\otimes_S(Q\otimes_R\tau^*Q)^{C_2} \arrow[r, "\varphi_{P,Q}"'] \arrow[d, shift right, "<j,l>"'] & ((P\otimes_R Q)\otimes_R\tau^*(P\otimes_R Q))^{C_2} \arrow[d, shift right, "{[j,l]}"'] \\
(F\otimes_R\tau^*F)^{C_2}\otimes_S(K\otimes_R\tau^*K)^{C_2} \arrow[r, "\varphi_{F,K}"'] \arrow[u, shift right, "<\pi,t>"'] & ((F\otimes_R K)\otimes_R\tau^*(F\otimes_R K))^{C_2} \arrow[u, shift right, "{[\pi,t]}"']
\end{tikzcd}$$

ამ ყველაფრის გათვალისწინებით ვიღებთ რომ $\varphi_{P,Q}$ *არის* $\varphi_{F,K}$*-ის რეტრაქტი ეს უკანასკნელი კი იზომორფიზმია. რადგან იზომორფიზმის რეტრაქტი იზომორფიზმია ვიღებთ რომ ასახვა* $\varphi_{P,Q}$ *არის იზომორფიზმი.*

წინადადება 10.16 *$\eta_{R^n} : R \otimes_S (R^n \otimes_R \tau^* R^n)^{C_2} \to R^n \otimes_R \tau^* R^n$ იზომორფიზმია.*

დამტკიცება. დავთვალოთ შემდეგი იზომორფიზმების ჯაჭვი:

$R \otimes_S (R^n \otimes_R \tau^* R^n)^{C_2} \cong R \otimes_S (R^{\frac{n(n-1)}{2}} \oplus S^n) \cong (R \otimes_S R) \oplus ... \oplus (R \otimes_S R) \oplus R^n) \cong R^{n^2} \cong R^n \otimes_R \tau^* R^n$

ვნახოთ ამ იზომორფიზმის მოქმედება ელემენტებზე:

$r \otimes (\sum_j (r_1^j, ..., r_n^j) \otimes (t_1^j, ..., t_n^j)) \mapsto r \otimes (\sum_j (\tau(r_1^j) t_2^j, ..., \tau(r_{n-1}^j) t_n^j, r_1^j \tau(t_1^j), ..., r_n^j \tau(t_n^j))) \mapsto$

$\sum_j (r\tau(r_1^j) t_2^j, r r_1^j \tau(t_2^j), ..., r\tau(r_{n-1}^j) t_n^j, r r_{n-1}^j \tau(t_n^j), r r_1^j \tau(t_1^j), ..., r r_n^j \tau(t_n^j)) \mapsto$

$r(\sum_j (r_1^j, ..., r_n^j) \otimes (t_1^j, ..., t_n^j))$

ბოლო გადასვლის ჭეშმარიტობა გამომდინარეობს მისი შექცეული ასახვიდან $f : R^n \otimes_R \tau^* R^n \to R^{n^2}$ და იქიდან რომ $\sum_j (r_1^j, ..., r_n^j) \otimes (t_1^j, ..., t_n^j) = \sum_j (t_1^j, ..., t_n^j) \otimes (r_1^j, ..., r_n^j)$ ამ ტოლობის ორივე მხრიდან f-ის მოდებით ვიღებთ შემდეგ ტოლობას $\sum_j (r_1^j \tau(t_2^j), r_2^j \tau(t_1^j), ..., r_{n-1}^j \tau(t_n^j), r_n^j \tau(t_{n-1}^j), r_1^j \tau(t_1^j), ..., r_n^j \tau(t_n^j)) = \sum_j (t_1^j \tau(r_2^j), t_2^j \tau(r_1^j), ..., t_{n-1}^j \tau(r_n^j), t_n^j \tau(r_{n-1}^j), t_1^j \tau(r_1^j), ..., t_n^j \tau(r_n^j))$ რადგან ეს ჯამი და ტოლობა განსაზღვრულია კომპონენტებზე ვიღებთ სასურველ იზომორფიზმს. ეს ჯაჭვი ემთხვევა η_{R^n}-ს და ამტკიცებს რომ ის იზომორფიზმია.

წინადადება 10.17 *$R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \cong P \otimes_R \tau^* P$*

დამტკიცება. რადგან P არის სასრულად წარმოქმნილი პროექციული ის იქნება სასრულად წარმოქმნილი თავისუფალი F-ის რეტრაქტი ანუ გვაქვს ასახვები

$$P \underset{j}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} F$$

ისეთები რომ $\pi j = id_P$ ასახვები გვიჩენენ შემდეგ ასახვებს

$$R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \underset{<j>}{\overset{<\pi>}{\leftrightarrows}} R \otimes_S (F \otimes_R \tau^* F)^{C_2}$$

$$P \otimes_R \tau^* P \underset{[j]}{\overset{[\pi]}{\leftrightarrows}} F \otimes_R \tau^* F$$

ფუნქტორიალობიდან გამომდინარე $< \pi >< j >=< \pi j >=< id >= id$ და ანალოგიურად $[\pi][j] = [\pi j] = [id] = id$.

გვაქვს ბუნებრივი გარდაქმნა η რომელიც აკომუტირებს დიაგრამას:

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_S (P \otimes_R \tau^* P)^{C_2} \arrow[r, "\eta_P"'] \arrow[d, shift right, "\langle j\rangle"'] & P \otimes_R \tau^* P \arrow[d, shift right, "{[j]}"'] \\
R \otimes_S (F \otimes_R \tau^* F)^{C_2} \arrow[r, "\eta_F"'] \arrow[u, shift right, "<\pi>"'] & F \otimes_R \tau^* F \arrow[u, shift right, "{[\pi]}"']
\end{tikzcd}$$

ამ ყველაფრის შეჯამებით გამოდის რომ η_P არის η_F-ის რეტრაქტი ეს უკანასკნელი კი იზომორფიზმია. აქედან გამომდინარე η_P-ც იზომორფიზმია რაც ამტკიცებს სასურველ შედეგს.

11 ნორმა გროტენდიკის ჯგუფზე

წინადადება 11.1 *მოცემულია ორი ადიტიური მონოიდი M, M' და ასახვა მათ შორის $N : M \to M'$ რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას $N(x+y+z)+N(x)+N(y)+N(z) = N(x+y)+N(y+z)+N(x+z)$ მაშინ ეს ასახვა გაგვიჩენს მონოიდების გროტენდიკის ჯგუფებს შორის ასახვას $N : G(M) \to G(M')$*

დამტკიცება. აქედან დაწყებული გამოვიყენებთ ასახვას $N = p'N : M \to G(M')$ გვიჩნდება ასახვა $t : M \times M \to G(M')$, $t(x,y) = N(x+y)-N(x)-N(y)$ ვაჩვენოთ რომ ეს ასახვა ადიტიურია ორივე კომპონენტში $t(x+x',y) = N(x+x'+y)-N(x+x')-N(y) = N(x+x')+N(x+y)+N(x'+y)-N(x)-N(x')-N(y)-N(x+x')-N(y) = (N(x+y)-N(x)-N(y))+(N(x'+y)-N(x')-N(y)) = t(x,y)+t(x',y)$. ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ ასახვა $N : G(M) \to G(M')$, $x-y \mapsto N(x)+t(y,y)-N(y)-t(x,y)$ ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ რომ ეს ასახვა სწორედ არის განსაზღვრული ვთქვათ $x-y = x'-y'$ ეს იგივეა რაც $\exists s \in M$, $x+y'+s = x'+y+s$ გვინდა ვაჩვენოთ რომ $N(x-y) = N(x'-y')$. ვიცით რომ სრულდება ტოლობა $N(x+y'+s) = N(x'+y+s)$ ან რაც იგივეა $N(x+y')+N(x+s)+N(y'+s)-N(x)-N(y')-N(s) = N(x'+y)+N(x'+s)+N(y+s)-N(x')-N(y)-N(s)$. გვაქვს შემდეგი ტოლობები

$N(x+s)+N(y'+s)+N(x')+N(y)+t(s,s) = t(x,s)+N(x)+N(s)+t(y',s)+N(y')+N(s)+N(x')+N(y)+t(s,s) = t(x+y'+s,s)+N(x)+N(s)+N(y')+N(s)+N(x')+N(y) = t(x'+y+s,s)+N(x)+N(s)+N(y')+N(s)+N(x')+N(y) = t(x',s)+N(x')+N(s)+t(y,s)+N(y)+N(s)+N(x)+N(y')+t(s,s) = N(x'+s)+N(y+s)+N(x)+N(y')+t(s,s)$

ეს ტოლობები გვაძლებს შემდეგ ტოლობას $N(x+s)+N(y'+s)-N(x)-N(y') = N(x'+s)+N(y+s)-N(x')-N(y)$. ახლა ეს ტოლობა გამოვაკლოთ შემდეგ ტოლობას $N(x+y')+N(x+s)+N(y'+s)-N(x)-N(y')-N(s) = N(x'+y)+N(x'+s)+N(y+s)-N(x')-N(y)-N(s)$ ეს მოგვცემს ტოლობას $N(x+y') = N(x'+y)$. ან რაც იგივეა $N(x)+N(y')+t(x,y') = N(x')+N(y)+t(x',y)$ გამოვიყენოთ შემდეგი ორი ტოლობა $t(x+y'+s,y) = t(x'+y+s,y)$ და $t(x+y'+s,y') = t(x'+y+s,y')$ გამოვიყენოთ წრფივობა $t(x,y)+t(y',y)+t(s,y) = t(x',y)+t(y,y)+t(s,y)$ და $t(x,y')+t(y',y')+t(s,y') = t(x',y')+t(y,y')+t(s,y')$ აქედან $-t(x',y) = t(y,y)-t(x,y)-t(y',y)$ და $-t(x,y') = t(y',y')-t(x',y')-t(y,y')$ ამის შემდეგ გადავწეროთ ტოლობა $N(x)+N(y')+t(x,y') = N(x')+N(y)+t(x',y)$ როგორც $N(x)-N(y)-t(x'y) = N(x')-N(y')-t(x,y')$ აქ $-t(x',y)$ და $-t(x,y')$ შევცვალოთ შემდეგი გამოსახულებებით $t(y,y)-t(x,y)-t(y',y)$ და $t(y',y')-t(x',y')-t(y,y')$ მივიღებთ ტოლობას $N(x)-N(y)+t(y,y)-t(x,y)-t(y',y) = N(x')-N(y')+t(y',y')-t(x',y')-t(y,y')$ ორივე მხარეს დავუმატოთ $t(y,y') = t(y',y)$ რაც მოგვცემს იგივეობას

$N(x)-N(y)+t(y,y)-t(x,y) = N(x')-N(y')+t(y',y')-t(x',y')$. *ეს კი ჩვენი სასურველი ტოლობაა* $N(x-y) = N(x'-y')$ *როცა* $x-y = x'-y'$.

განმარტება 11.1 *რადგან წინადადება 10.5-ით სამართლიანია ტოლობა* $N(x+y) = N(x) + N(y) + tr(x\bar{y})$ *ჩვენი ნორმისთვის სასრულადწარმოქმნილ პროექციულ მოდულებზე ამიტომ სრულდება ტოლობა* $N(x+y+z)+N(x)+N(y)+N(z) = N(x+y)+N(y+z)+N(x+z)$ *წინა შედეგით ეს გვაძლევს ნორმას გროტენდიკის ჯგუფზე* $N : K_0(R) \to K_0(S)$ *,* $x-y \mapsto N(x)+tr(y\bar{y})-N(y)-tr(x\bar{y})$.

ახლა ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ ნორმასთან დაკავშირებული თვისებები ცხადია რომ სრულდება $N(0) = 0$ *და* $N(1) = 1$ *ახლა დავამტკიცოთ დანარჩენი თვისებები:*

წინადადება 11.2 $N(\overline{x-y}) = N(x-y)$

დამტკიცება. იმის გათვალისწინებით რომ $N(x) = N(\overline{x})$ *გვექნება* $N(\overline{x-y}) = N(\overline{x}-\overline{y}) = N(\overline{x}) + tr(\overline{y}y) - N(\overline{y}) - tr(\overline{x}y) = N(x) + tr(y\overline{y}) - N(y) - tr(x\overline{y}) = N(x-y)$ *რაც ამტკიცებს სასურველ ტოლობას.*

წინადადება 11.3 $res(N(x-y)) = (x-y)(\overline{x-y})$

დამტკიცება. როგორც ვიცით res *არის რგოლების ასახვა ამის გათვალისწინებით გვექნება:*

$res(N(x-y)) = res(N(x)+tr(y\overline{y})-N(y)-tr(x\overline{y})) = res(N(x))+res(tr(y\overline{y}))-res(N(y))-res(tr(x\overline{y})) = x\overline{x}+y\overline{y}+\overline{y}y-y\overline{y}-x\overline{y}-\overline{x}y = x(\overline{x}-\overline{y})-y(\overline{x}-\overline{y}) = (x-y)(\overline{x}-\overline{y}) = (x-y)(\overline{x-y})$

აქ გამოვიყენეთ ჩვენთვის ცნობილი შემდეგი იგივეობები $res(tr(x-y)) = x-y+\overline{x-y}$ *და* $res(N(x)) = x\overline{x}$.

წინადადება 11.4 $N(x-y+a-b) = N(x-y)+N(a-b)+tr((x-y)(\overline{a-b}))$

დამტკიცება. იმის გათვალისწინებით რომ tr *ადიტიური ასახვაა და სრულდება შემდეგი იგივეობა* $N(x+a) = N(x)+N(a)+tr(x\overline{a})$ *გვაქვს შემდეგი ტოლობები:*

$N(x-y+a-b) = N(x+a-(y+b)) = N(x+a)+tr((y+b)(\overline{y+b}))-N(y+b)-tr((x+a)(\overline{y+b})) = N(x)+N(a)+tr(x\overline{a})+tr(y\overline{y})+tr(y\overline{b})+tr(b\overline{y})+tr(b\overline{b})-N(y)-N(b)-tr(y\overline{b})-tr(x\overline{y})-tr(x\overline{b})-tr(a\overline{y})-tr(a\overline{b}) = (N(x)-N(y)+tr(y\overline{y})-tr(x\overline{y}))+(N(a)-N(b)+tr(b\overline{b})-tr(a\overline{b}))+tr(x\overline{a})+tr(b\overline{y})-tr(x\overline{b})-tr(a\overline{y}) = N(x-y+a-b) = N(x-y)+N(a-b)+tr((x-y)(\overline{a-b}))$

წინადადება 11.5 $N((x-y)(a-b)) = N(x-y)N(a-b)$

დამტკიცება. ამ ტოლოვის საჩვენებლად გამოვიყენოთ შემდეგი ორი იგივეობა:

$N(x)tr(a\overline{b}) = N(x)(N(a+b)-N(a)-N(b)) = N(xa+xb)-N(xa)-N(xb) = tr(xa\overline{xb})$

$tr(x\overline{y})tr(a\overline{b}) = (N(x+y) - N(x) - N(y))(N(a+b) - N(a) - N(b)) = (N(xa+xb+ya+yb) - N(xa+xb) - N(ya+yb)) - (N(xa+ya) - N(xa) - N(ya)) - (N(xb+yb) - N(xb) - N(yb)) = tr((xa+xb)(\overline{ya+yb})) - tr(xa\overline{ya}) - tr(xb\overline{yb}) = tr(xa\overline{yb}) + tr(xb\overline{ya})$

გავშალოთ ტოლობის ორივე მხარე:

$N(x-y)N(a-b) = (N(x) - N(y) + tr(y\overline{y}) - tr(x\overline{y}))(N(a) - N(b) + tr(b\overline{b}) - tr(a\overline{b})) = N(xa) + N(yb) - N(xb) - N(ya) + (N(x) - N(y))(tr(b\overline{b}) - tr(a\overline{b})) + (tr(y\overline{y}) - tr(x\overline{y}))(N(a) - N(b)) + (tr(y\overline{y}) - tr(x\overline{y}))(tr(b\overline{b}) - tr(a\overline{b}))$

$N((x-y)(a-b)) = N(xa+yb-(xb+ya)) = N(xa+yb) - N(xb+ya) + tr((xb+ya)(\overline{xb+ya})) - tr((xa+yb)(\overline{xb+ya})) = N(xa) + N(yb) + tr(xa\overline{yb}) - N(xb) - N(ya) - tr(xb\overline{ya}) + tr((xb+ya)(\overline{xb+ya})) - tr((xa+yb)(\overline{xb+ya}))$

ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარე საჩვენებელი გვაქ შემდეგი ტოლობა:

$tr(xa\overline{yb}) - tr(xb\overline{ya}) + tr((xb+ya)(\overline{xb+ya})) - tr((xa+yb)(\overline{xb+ya})) = (N(x) - N(y))(tr(b\overline{b}) - tr(a\overline{b})) + (tr(y\overline{y}) - tr(x\overline{y}))(N(a) - N(b)) + (tr(y\overline{y}) - tr(x\overline{y}))(tr(b\overline{b}) - tr(a\overline{b}))$

გამოვიყენოთ $N(x)tr(a\overline{b}) = tr(xa\overline{xb})$ *და* $tr(x\overline{y})tr(a\overline{b}) = tr(xa\overline{yb}) + tr(xb\overline{ya})$ *იგივეობები და გავხსნათ ორივე მხარე:*

$(N(x) - N(y))(tr(b\overline{b}) - tr(a\overline{b})) + (tr(y\overline{y}) - tr(x\overline{y}))(N(a) - N(b)) + (tr(y\overline{y}) - tr(x\overline{y}))(tr(b\overline{b}) - tr(a\overline{b})) = tr(xb\overline{xb}) - tr(xa\overline{xb}) - tr(yb\overline{yb}) + tr(ya\overline{yb}) + tr(ay\overline{ay}) - tr(ax\overline{ay}) - tr(by\overline{by}) + tr(bx\overline{by}) + tr(yb\overline{yb}) + tr(yb\overline{yb}) + tr(xa\overline{yb}) + tr(xb\overline{ya}) - tr(ya\overline{yb}) - tr(yb\overline{ya}) - tr(xb\overline{yb}) - tr(xb\overline{yb}) = tr(xb\overline{xb}) - tr(xa\overline{xb}) + tr(ay\overline{ay}) - tr(ax\overline{ay}) + tr(xa\overline{yb}) + tr(xb\overline{ya}) - tr(yb\overline{ya}) - tr(xb\overline{yb})$

$tr(xa\overline{yb}) - tr(xb\overline{ya}) + tr((xb+ya)(\overline{xb+ya})) - tr((xa+yb)(\overline{xb+ya})) = tr(xa\overline{yb}) - tr(xb\overline{ya}) + tr(xb\overline{xb}) + tr(ya\overline{ya}) + tr(xb\overline{ya}) + tr(ya\overline{xb}) - tr(xa\overline{xb}) - tr(xa\overline{ya}) - tr(yb\overline{xb}) - tr(yb\overline{ya}) = tr(xa\overline{yb}) + tr(xb\overline{xb}) + tr(ya\overline{ya}) + tr(ya\overline{xb}) - tr(xa\overline{xb}) - tr(xa\overline{ya}) - tr(yb\overline{xb}) - tr(yb\overline{ya})$

აქედან ცხადია სასურველი ტოლობის სისწორე.

12 გროტენდიკის ჯგუფზე ტამბარას სტრუქტურის მაგალითები

მაგალითი 12.1 *გალუას გაფართოების ტრივიალური მაგალითია ველების გალუას გაფართოება. მოცემული ველების გაფართოებისთვის* $K \subset L$ *გამოვთვალოთ ტამბარას სტრუქტურა.*

მოდულები ველებზე იგივე ვექტორული სივრცეებია ცალსახად განსაზღვრული განზომილებით ამიტომ გვექნება $P(K) \cong \mathbb{N}$ *და* $P(L) \cong \mathbb{N}$ *როგორც ნახევარრგოლები აქედან გამომდინარე, რადგან ნატურალური რიცხვების გროტენდიკის ჯგუფია მთელი რიცხვები, გვექნება* $K_0(K) \cong K_0(L) \cong \mathbb{Z}$ *და ორივე შემთხვევაში გვექნება ჩადგმები* $P(K) \to \mathbb{Z}$ *,* $K^n \mapsto n$ *და* $P(L) \to \mathbb{Z}$ *,* $L^n \mapsto n$*. ხოლო*

მეორე რიგის ციკლური ჯგუფის მოქმედება იქნება ტრივიალური რადგან $\tau^* L^n \cong (\tau^* L)^n \cong L^n$.

დავთვალოთ res , tr და N ამ შემთხვევაში. შემდეგი იზომორფიზმი $i^* L^n \cong (K^2)^n \cong K^{2n}$ გვიჩენს ორზე გამრავლებას როგორც ნატურალურ რიცხვებს შორის ადიტიურ ასახვას რომელიც გროტენდიკის ჯგუფზე გავრცელებით გვაძლევს $tr : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$. იზომორფიზმი $L \otimes_K K^n \cong L^n$ კი გვეუბნება რომ res მოიცემა ნატურალურ რიცხვებს შორის იგივური ასახვით რომელსაც ვავრცელებთ გროტენდიკის ჯგუფზე და ვიღებთ ასახვას $res : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x$. ნორმის დასათვლელად ვიყენებთ შემდეგ იზომორფიზმს $(L^n \otimes_L \tau^* L^n)^{C_2} \cong L^{\frac{n(n-1)}{2}} \oplus K \cong K^{n^2}$ რომელიც გვეუბნება რომ N არის ნატურალურ რიცხვებს შორის ასახვის, რომელსაც ელემენტები აყავს კვადრატში, გავრცელება გროტენდიკის ჯგუფზე $N : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$.

ამის შემდეგ ტამბარას სტრუქტურა ადვილი შესამოწმებელია მაგალითად:

$tr(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = tr(a) + tr(b)$

$tr(\bar{a}) = tr(a)$

$res(tr(a)) = res(2a) = 2a = a + \bar{a}$

$tr(ares(b)) = 2ares(b) = 2ab = tr(a)b$

$N(ab) = (ab)^2 = a^2 b^2 = N(a)N(b)$

$res(N(a)) = res(a^2) = a^2 = a\bar{a}$

$N(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = N(a) + N(b) + tr(a\bar{b})$

შემდეგ მაგალითში ვიყენებთ ალგებრის რამდენიმე კარგად ცნობილ ფაქტს რომლებიც მოცემულია ალგებრის მრავალ წიგნში მაგალითად Basic algebra [1].

მაგალითი 12.2 შევისწავლოთ რგოლების გალუას გაფართოებაზე $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ ტამბარას სტრუქტურა. როგორც სიმრავლეები ესენია:

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] = \{a + bi + c\frac{1+\sqrt{5}}{2} + di\frac{1+\sqrt{5}}{2} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$

ჯგუფის მოქმედება განვსაზღვროთ წარმომქმნელებზე როგორც $1 \mapsto 1$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \mapsto \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $i \mapsto -i$.

ვაჩვენოთ რომ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ რგოლების გალუას გაფართოებაა.

წინადადება 12.1 $(\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}])^{C_2} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

დამტკიცება. იმისთვის რომ ელემენტი $a+bi+c\frac{1+\sqrt{5}}{2}+di\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ შედიოდეს ფიქსირებულ ნაწილში აუცილებელია და საკმარისი რომ:

$a + bi + c\frac{1+\sqrt{5}}{2} + di\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau(a + bi + c\frac{1+\sqrt{5}}{2} + di\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = a - bi + c\frac{1-\sqrt{5}}{2} - di\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ეს ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა სრულდება შემდეგი ორი ტოლობა: $a + c\frac{1+\sqrt{5}}{2} = a + c\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ და $b + d\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -b - d\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ადვილი სანახავია რომ პირველი ტოლობა

სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა გვაქვს ნებისმიერი a *და როცა* $c = 0$ *მეორე ტოლობა იგივეა რაც* $2b+d+d\sqrt{5} = -2b-d+d\sqrt{5}$ *აქედან* $2b+d = -(2b+d)$ *ანუ* $d = -2b$ *აქედან გამომდინარე ფიქსირებულ ნაწილში შევა შემდეგი ტიპის ელემენტები:* $a+bi-2bi\frac{1+\sqrt{5}}{2} = a-b\sqrt{-5}$ *სადაც* $a, b \in \mathbb{Z}$ *ეს ელემენტები კი ზუსტად შეადგენენ* $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$*-ს.*

წინადადება 12.2 $\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ *არის თავისუფალი* $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$*-მოდული.*

დამტკიცება. გვაქვს ბაზისი $\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}i\}$ *მართლაც:*

$(a + b\sqrt{-5})1 + (c + d\sqrt{-5})\frac{1+\sqrt{5}}{2}i = a + b\sqrt{-5} + c\frac{1+\sqrt{5}}{2}i - d\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

ახლა თუ ამ ტოლობაში ჩავწერთ $c = -2b + c'$*-ს გვექნება:*

$(a + b\sqrt{-5})1 + (c + d\sqrt{-5})\frac{1+\sqrt{5}}{2}i = (a - 2d) - bi + c'\frac{1+\sqrt{5}}{2}i - d\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

აქედან გამომდინარე $\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}i\}$*-ის წრფივი გარსი არის* $\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ *ახლა ვაჩვენოთ რომ ეს ორი ელემენტი წრფივად დამოუკიდებელია ვთქვათ* $(a + b\sqrt{-5})1 + (c + d\sqrt{-5})\frac{1+\sqrt{5}}{2}i = 0$ *ეს იგივეა რაც შემდეგი ორი ტოლობა* $a - d\frac{5+\sqrt{5}}{2} = 0$ *და* $b\sqrt{5} + c\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0$ *ანუ გვაქვს* $2a - 5d = \sqrt{5}d$ *და* $(2b + c)\sqrt{5} = -c$ *რადგან მთელი რიცხვი ვერ იქნება ირაციონალურის ტოლი* $d = 0$ *,* $a = 0$ *,* $c = 0$ *და* $b = 0$.

წინადადება 12.3 $h : \mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \otimes_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]} \mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \to (\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}])^2$ *,* $x \otimes y \mapsto (xy, x\tau(y))$ *არის იზომორფიზმი.*

დამტკიცება. $\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \otimes_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]} \mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$*-ის ბაზისი როგორც* $\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$*-მოდულის არის* $\{1 \otimes 1, 1\otimes \frac{1+\sqrt{5}}{2}i\}$ *მაშინ* $h(1\otimes 1) = (1, 1)$ *და* $h(1\otimes \frac{1+\sqrt{5}}{2}i) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}i, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}i)$ *ცხადია რომ ეს ელემენტები წრფივად დამოუკიდებლებია და ასევე რადგან სრულდება შემდეგი ორი ტოლობა* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}i(1, 1) + (\frac{1+\sqrt{5}}{2}i, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}i) = (1, 0)$ *და* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}i(1, 1) - (\frac{1+\sqrt{5}}{2}i, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}i) = (0, 1)$ *ცხადია რომ მოცემული ასახვა იზომორფიზმია.*

შემდეგი განმარტება და წინადადება მოცემულია როზენბერგის წიგნში [5].

განმარტება 12.1 *დედეკინის რგოლი* R*-ისთვის წილადური იდეალი არის მისი წილადების ველის არანულოვანი* R*-ქვემოდულები* I *რომლებისთვისაც არსებობს არანულოვანი* $r \in R$ *რომ* $rI \subset R$ *და ესენი ადგენენ ჯგუფს* $I(R)$ *სადაც გამრავლება მოიცემა როგორც* IJ*. მთავარი წილადური იდეალებია ისეთი წილადური იდეალები რომლებიც წარმოქმნილია ერთი არანულოვანი ელემენტით როგორც* R*-მოდული აღვნიშნოთ ის როგორც* $Pr(R)$ *ეს წარმოადგენს წილადური იდეალების ქვეჯგუფს. მაშინ განვსაზღვროთ იდეალების კლასთა ჯგუფი როგორც* $C(R) = I(R)/Pr(R)$.

წინადადება 12.4 *ვთქვათ მოცემულია* R*-დედეკინის რგოლი მაშინ სასრულად წარმოქმნილი პროექციული* R*-მოდული ჩაიწერება როგორც* $R^{k-1} \oplus I$ *სადაც* I *არანულოვანი წილადური იდეალია*

მაშინ არსებობს იზომორფიზმი $K_0(R) \to \mathbb{Z} \oplus C(R)$ *რომელიც მოიცემა ელემენტებზე როგორც* $[R^{k-1} \oplus I] \mapsto (k, [I])$. *მიმატება და გამრავლება* $\mathbb{Z} \oplus C(R)$*-ზე მოიცემა შემდეგნაირად* $(k, [I]) + (k', [I']) = (k + k', [I][I'])$ *და* $(k, [I])(k', [I']) = (kk', [I]^{k'}[I']^k)$ *ამ ოპერაციების მიმართ მოცემული ასახვა რგოლების იზომორფიზმია.*

წინადადება 12.5 *რგოლები* $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ *და* $\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ *არიან დედეკინის რგოლები და გვაქვს* $C(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]) = C_2$ *და* $C(\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]) = 0$.

ის რომ $C(\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]) = 0$ *მოცემულია სტატიაში Imaginary Multiquadratic Fields of Class Number 1 [6].*

აქედან გამომდინარე გვაქვს $K_0(\mathbb{Z}[i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]) \cong \mathbb{Z}$ *და* $K_0(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]) \cong \mathbb{Z} \oplus C_2 \cong \mathbb{Z}[t]/(2t, t^2)$ *ამ უკანასკნელში გამრავლება მოიცემა როგორც* $(0, \epsilon)(0, \epsilon) = (0, 1)$.

$res : \mathbb{Z} \oplus C_2 \to \mathbb{Z}$ *იქნება რგოლების მორფიზმი ამიტომ* $res(1, 1) = 1$ *ამიტომ* $res(x, 1) = x$ *და* $res(0, \epsilon)(0, \epsilon) = res(0, \epsilon)res(0, \epsilon) = res(0, 1) = 0$ *ამიტომ* $res(x, \epsilon) = x$.

რადგან $\mathbb{Z}$ *შედგება თავისუფალი მოდულებისგან მასზე ჯგუფის მოქმედება ტრივიალურია ამიტომ ტოლობიდან* $res(tr(x)) = x + \bar{x} = x + x = 2x$ *გვაქვს რომ* $tr(x) = (2x, 1)$ *რადგან ეს ასახვა თავისუფალ მოდულის კლასს გადაიყვნს თავისუფალი მოდულის კლასში.*

ანალოგიურად რადგან $res(N(x)) = x\bar{x} = xx = x^2$ *და თავისუფალი მოდულის კლასი ამ ასახვას გადაყავს თავისუფალ მოდულის კლასში ამიტომ* $N(x) = (x^2, 1)$.

ლიტერატურა

[1] Cohn P. M., Basic algebra: groups, rings and fields, Springer, 2nd printing, 2005, p. 110-117.

[2] Charles A. Weibel, The K-book An Introduction to Algebraic K-theory, American Mathematical Society, 2013, p. 69-73, 74-88.

[3] Cornelius Greither, Cyclic Galois Extensions of Commutative Rings, Springer-Verlag, 1992, p. 1-3.

[4] Strickland N. P., Tambara functors, arXiv:1205.2516 [math.AT], 2012, p. 40-41.

[5] Jonathan Rosenberg, Algebraic K-Theory and Its Applications, Springer-Verlag, 1994, p. 16-21.

[6] Amy Feaver, Imaginary Multiquadratic Fields of Class Number 1, arXiv:1608.04419 [math.NT], 2016.